











NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

---

*TROISIÈME SÉRIE.*

•  
1882





UNIVERSITY OF TORONTO  
LIBRARY

**NOUVELLES ANNALES**  
DE  
**MATHÉMATIQUES,**

**JOURNAL DES CANDIDATS**  
**AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,**

REDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE FONTANES.

---

**TROISIÈME SÉRIE.**

*TOME PREMIER.*

---

**PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,**  
**ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.**

---

**PARIS,**

**GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE**  
**DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,**  
**SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,**  
Quai des Augustins, n° 55.

---

**1882.**

(Tous droits réservés.)



GA

1

N8

v. 41

20850  
C



# NOUVELLES ANNALES

DE

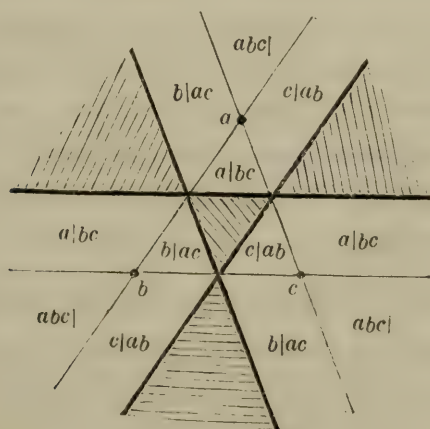
# MATHÉMATIQUES.

## SUR UN CRITÉRIUM RELATIF A LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. HALPHEN.

*On détermine une conique par trois de ses points et par son centre, et il s'agit de distinguer les cas où cette conique est une ellipse de ceux où elle est une hyperbole.*

Pour résoudre cette question, Steiner a donné le critérium suivant : Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les trois points, tracez les trois droites qui joignent deux à deux les milieux



*des segments  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ . Ces trois droites partagent le plan en sept régions, dont quatre ne contiennent aucun des points  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Si le centre est dans une quelconque*

*de ces quatre régions, la conique est une ellipse ; s'il est dans une quelconque des trois autres, la conique est une hyperbole.*

Dans la figure ci-contre, les quatre premières régions sont distinguées par des hachures qui les couvrent.

Voici maintenant une seconde question qui se présente ici :

*Le centre étant placé de telle sorte que la conique soit une hyperbole, on demande de distinguer la répartition des trois points entre les deux branches de cette hyperbole ;*

et voici la réponse :

*Chacune des trois régions qui contiennent  $a, b$  ou  $c$  est subdivisée en quatre parties par les trois droites  $ab, bc, ca$ , savoir : un triangle, un angle, et deux bandes comprises entre deux droites parallèles.*

*Si le centre est dans un angle, les trois points sont sur une même branche de l'hyperbole.*

*Si le centre est dans un triangle, celui des trois points qui est un sommet de ce triangle est sur une branche, les deux autres sur l'autre branche.*

*Si le centre est dans une bande, les points sont répartis de la même manière que pour le triangle qui a un angle opposé par le sommet à l'un de ceux qui limitent cette bande.*

Sur la figure, la répartition est représentée par un trait qui sépare les points appartenant à une branche de ceux qui appartiennent à l'autre branche. Ainsi  $a | bc$  signifie que  $a$  est sur une branche,  $b$  et  $c$  sur l'autre.

Envisageons maintenant les mêmes questions pour une conique déterminée par trois de ses tangentes, et son centre.



Tout ce qui précède s'applique exactement à ce nouveau problème, pourvu que l'on envisage les droites  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  comme étant les tangentes données. Pour la répartition des tangentes entre les branches d'hyperbole, on devra considérer  $a$  comme désignant la droite  $bc$ ,  $b$  la droite  $ca$ ,  $c$  la droite  $ab$ .

Remarquons, en terminant, cette conséquence : *Sur une même branche d'hyperbole on prend trois points quelconques. Le centre de la courbe est toujours dans un des angles opposés par le sommet à ceux du triangle formé par les trois points. Il est aussi dans un des angles opposés par le sommet à ceux du triangle formé par les tangentes en ces trois points.*

## SUR QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME DE SAVARY, RELATIF AUX ENVELOPPES DES COURBES PLANES :

PAR M. H. RESAL.

1. Soient, dans un plan,

(S) une courbe qui roule sur une courbe fixe (S') :

. A le point de contact de ces courbes ;

R, R' leurs rayons de courbure en ce point ;

$ma$  une courbe tracée dans le plan de (S) ;

$p = Am$  la longueur de la normale abaissée du point A sur  $ma$  ;

$\varphi$  l'angle formé par la direction de  $Am$  avec celle de R ;

$\varrho$  le rayon de courbure en  $m$  de la courbe  $ma$  ;

$\varrho'$  le rayon de courbure au même point de l'enveloppe  $ma'$  de cette courbe.

En supposant que (S) et (S') opposent leurs convexités,

le théorème de Savary consiste dans la formule

$$(1) \quad \left( \frac{1}{\rho' - p} + \frac{1}{\rho + p} \right) \cos \varphi = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

Dans le cas où les courbes (S) et (S') seraient intérieures l'une à l'autre, on affecterait du signe — le plus grand des rayons de courbure R et R'.

Nous allons d'abord déduire de l'équation (1) quelques théorèmes connus, en admettant que (S) et (S') sont deux circonférences.

2. *Enveloppe d'une hypocycloïde ou d'une épicycloïde.* — Supposons que *am* soit la courbe décrite par un point d'une circonférence (S<sub>1</sub>) de rayon R<sub>1</sub> roulant intérieurement sur (S); la normale en *m* doit passer par le point de contact de ces deux circonférences, qui se confond par suite avec A.

Pour obtenir le rayon de courbure ρ<sub>1</sub> de *ma*, nous remplacerons dans la formule (1), eu égard au sens des courbures, ρ' par — ρ<sub>1</sub>, R par — R<sub>1</sub>, R' par R<sub>1</sub>, en supposant de plus ρ = 0. Il vient ainsi

$$\left( -\frac{1}{\rho_1 + p} + \frac{1}{p} \right) \cos \varphi = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}.$$

Le rayon de courbure ρ' de l'enveloppe de *ma* se déterminera au moyen de la formule (1) en y remplaçant ρ par ρ<sub>1</sub>, ce qui donne

$$\left( \frac{1}{\rho' - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) \cos \varphi = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

d'où, par addition,

$$\left( \frac{1}{\rho' - p} + \frac{1}{p} \right) \cos \varphi = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'}.$$

Cette dernière équation définit bien l'épicycloïde dé-



crite par un point de la circonférence  $(S_1)$  roulant sur la circonférence  $(S')$ .

Réciproquement, l'hypocycloïde  $ma$  est l'enveloppe des positions de l'épicycloïde déterminée par un point de la circonférence  $(S_1)$  roulant extérieurement sur  $(S')$ .

3. *Enveloppe de la développante d'une circonférence concentrique à  $(S)$ .* — Dans ce cas, l'angle  $\varphi$  est constant et l'on a évidemment

$$p + \varphi = R \cos \varphi,$$

et le rayon de la circonférence développée est  $R \sin \varphi$ .

La formule (1) donne par suite

$$\frac{\cos \varphi}{\rho' - p} = \frac{1}{R'},$$

d'où

$$\rho' - p = R' \cos \varphi :$$

ce qui est bien l'équation de la développante de la circonférence concentrique à  $(S')$  et dont le rayon serait  $R' \sin \varphi$ .

4. *Enveloppe d'une circonférence  $(S_1)$  de rayon  $\varphi$  dont le centre se trouve sur la circonférence  $(S)$ .* — Si nous considérons, par exemple, le point  $m$  de la partie intérieure de l'enveloppe, on a

$$p + \varphi = 2R \cos \varphi,$$

et la formule (1) donne

$$\rho' - p = \frac{2RR}{2R + R'} \cos \varphi,$$

d'où, par addition,

$$\rho' + \varphi = \frac{4R(R + R')}{2R + R'} \cos \varphi.$$

Mais en supposant  $\varphi = 0$ , cette dernière formule ferait

connaître le rayon de courbure  $\rho'$  de l'épicycloïde décrite par le centre de  $(S_1)$ . D'où il suit que la branche considérée (et il en est de même de l'autre en remplaçant  $\rho$  par  $-\rho$ ) est parallèle à cette épicycloïde.

5. *Quelles que soient les courbes  $(S)$  et  $(S')$  et la nature de l'enveloppée, l'enveloppe peut être décrite, au moins en partie, par un point du plan d'une courbe  $(S_1)$  qui roulerait sur  $(S')$ .* — Soit  $R_1$  le rayon de la courbe cherchée  $(S_1)$  au point  $A$ . La formule (1) donne, en y faisant  $\varphi = 0$  et remplaçant  $R$  par  $R_1$ ,

$$\left( \frac{1}{\rho' - p} + \frac{1}{p} \right) \cos \varphi = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'},$$

et, en retranchant cette équation de la formule précitée, on trouve

$$(2) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{\rho \cos \varphi}{(\rho + p)p};$$

on voit ainsi que la nature de la courbe  $(S_1)$  est indépendante de la forme de la courbe  $(S')$ .

6. Si l'enveloppée est une droite, on a  $\rho = \infty$  et

$$(3) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{\cos \varphi}{p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{D},$$

en désignant par  $D$  la portion de la normale en  $A$  à  $(S)$  déterminée par la droite.

Dans le cas où  $(S)$  est une circonférence et l'enveloppée un rayon de cette circonférence, on a  $p = R \cos \varphi$ , d'où

$$R_1 = \frac{R}{2}.$$

On vérifie ainsi que l'enveloppe est l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence, dont le diamètre est  $R$ , qui roulerait sur  $(S')$ .



7. Supposons maintenant que  $am$  soit la développante d'une circonférence concentrique à  $(S)$ , et dont le rayon est par suite  $R \sin \varphi$ . Nous avons

$$p + \rho = R \cos \varphi$$

et la formule (2) donne

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{\rho}{pR} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{R \cos \varphi - p}{p} \right),$$

d'où

$$(4) \quad R_1 = \frac{p}{\cos \varphi}.$$

Soit  $\theta$  l'angle formé par le rayon vecteur  $mA = p$  du point de la courbe cherchée  $(S_1)$  avec une droite  $mx$  fixe dans son plan. L'angle formé par la normale en  $A$  à  $(S_1)$  avec  $mx$  étant  $\theta - \varphi$ , l'angle de contingence est  $d\theta$ , et l'on a par suite

$$R_1^2 = \frac{p^2 d\theta^2 + dp^2}{d\theta^2},$$

et, en vertu de la formule (4),

$$\frac{dp}{p} = \tan \varphi d\theta,$$

d'où, en désignant par  $A$  une constante,

$$p = A e^{\tan \varphi \theta},$$

ce qui représente une spirale logarithmique si  $A$  est positif. L'origine de la spirale roulant sur la circonférence  $(S')$  ne décrira qu'une courbe intérieure à cette circonférence, qu'elle ne rencontrera que pour  $\theta = -\infty$  <sup>(1)</sup>.

Donc l'origine de la spirale ne décrira que la portion

(1) On reconnaît facilement que, entre  $\theta = 0$  et  $\theta = -\infty$ , la longueur de l'arc de la spirale est finie et a pour valeur  $\frac{A}{\sin \varphi}$ .

extérieure à (S) de la développante du cercle concentrique ayant pour rayon  $R' \sin \varphi$ .

La partie intérieure de l'enveloppe sera obtenue en prenant A négatif.

8. *Enveloppe d'une normale à une ellipse (S) qui roule sur une courbe fixe (S') (1).*

Soient, dans une position quelconque :

$BB' = 2a$  le grand axe de l'ellipse dont O est le centre ;  
I l'intersection de la normale en A aux courbes (S) et (S')  
avec le grand axe ;

$mN$  la normale enveloppée rencontrant  $BB'$  en J,  $m$  désignant le point correspondant de l'enveloppe ;

$\alpha$  l'angle donné  $NJB$  et  $\alpha'$  l'angle variable  $AIB$ .

Nous attribuerons aux lettres  $a, b, c$  leurs significations ordinaires et nous poserons

$$(5) \quad m = \tan \alpha, \quad m' = \tan \alpha',$$

d'où

$$(6) \quad dx' = \frac{dm'}{1 + m'^2}.$$

Nous savons que la normale au point A de l'ellipse rapportée à ses axes a pour équation

$$(7) \quad y = m' \left( x - \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right)$$

et que les coordonnées de ce point ont pour expressions

$$(8) \quad x' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}, \quad y' = \frac{b^2 m'}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}.$$

Soient  $x_1, y_1$  les coordonnées de l'intersection I des

---

(1) Le problème se rapporte à la question des engrenages elliptiques.



normales NJ et AI; on a

$$y_1 = m \left( x_1 - \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} \right), \quad y_1 = m' \left( x_1 - \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right),$$

d'où

$$x_1 = \frac{c^2}{m - m'} \left( \frac{m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} - \frac{m'}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right),$$

$$y_1 = \frac{c^2 m m'}{m - m'} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right)$$

et, en se reportant aux valeurs (8),

$$x_1 - x' = \frac{1}{m - m'} \left( \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} + \frac{b^2 m' - a^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right),$$

$$y_1 - y' = \frac{m'}{m - m'} \left( \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} + \frac{b^2 m' - a^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right).$$

On déduit de là, pour la distance AI = D,

$$(9) \quad D = - \frac{1}{m - m'} \left( \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} + \frac{b^2 m' - a^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}} \right) \sqrt{1 + m'^2}.$$

Nous avons pris le signe — pour le radical, pour que l'on obtienne un résultat positif quand on suppose  $m = m'$ , et l'on obtient ainsi

$$(10) \quad D = R = a^2 b^2 \left( \frac{1 + m'^2}{a^2 + b^2 m'^2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui est bien l'expression connue du rayon de courbure de l'ellipse.

On déduit des formules (8), (9) et (10)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{R_1} = 1 - a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2 m^2} \frac{1 + m'^2}{a^2 + b^2 m'^2} \\ \times \frac{m - m'}{[c^2 m \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} + (b^2 m' - a^2 m) \sqrt{a^2 + b^2 m^2}]} \end{array} \right.$$

Soient  $mx$  une droite fixe dans le plan de  $(S_1)$  partant

du point  $m$  qui sera l'origine des coordonnées auxquelles on rapportera cette courbe;  $ds$  l'élément commun à  $(S)$  et  $(S_1)$ ,  $\theta$  l'angle formé par  $mJ$  avec  $mx$ . Nous avons

$$\frac{R}{R_1} = \frac{d\theta}{dx'} = \frac{d\theta}{dm'} (1 + m'^2),$$

et, d'après l'équation (11),

$$d\theta = dx' - a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} \\ \times \frac{(m - m') dm'}{(a^2 + b^2 m'^2) [c^2 m \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} + (b^2 m' - a^2 m) \sqrt{a^2 + b^2 m^2}]}.$$

Pour fixer les idées, nous considérons le roulement à partir du moment où  $B$  se trouvait sur  $(S')$ , et nous supposons que  $mx$  coïncidait avec la portion initiale de  $mJ$ , de sorte que l'on a  $\theta = \alpha$  pour  $\alpha' = 0$  ou  $m' = 0$ .

Nous avons ainsi

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \text{arc tang } m' + \alpha - a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} \\ &\times \int_0^{m'} \frac{(m - m') dm'}{(a^2 + b^2 m'^2) [c^2 m \sqrt{a^2 + b^2 m'^2} + (b^2 m' - a^2 m) \sqrt{a^2 + b^2 m^2}]} \end{aligned} \right.$$

L'équation (10) peut se mettre sous la forme

$$\frac{ds}{dx'} = a^2 b^2 \left( \frac{1 + m'^2}{a^2 + b^2 m'^2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$ds = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2) dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous avons ainsi pour  $(S_1)$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= ds \sin \theta = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2) \sin \theta dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ dy &= -ds \cos \theta = -\frac{a^2 b^2 (1 + m'^2) \cos \theta dm'}{(a^2 + b^2 m'^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

et les équations (12) et (13) permettront de déterminer



$x$  et  $y$  en fonction de la variable auxiliaire  $m'$ . On peut d'ailleurs, en remplaçant cette variable par une autre, convenablement choisie, simplifier et même réduire quelques-unes des transcendantes qui entrent dans les expressions de  $x$  et  $y$ .

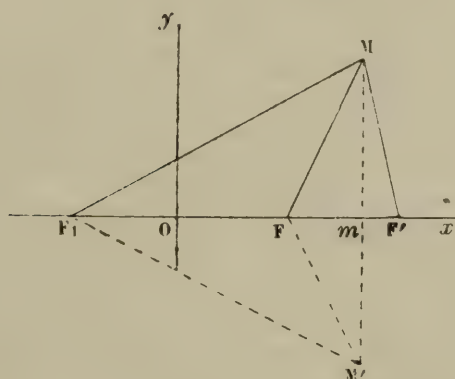
## NOTE SUR LES COORDONNÉES BIPOLAIRES;

PAR M. P. BARBARIN,

Professeur au lycée de Nice.

I. Dans le système des coordonnées bipolaires, un point  $M$  est déterminé par ses distances  $FM = \rho$ ,  $F_1M = \rho_1$ , à deux points fixes  $F, F_1$  appelés *foyers* ou

Fig. 1.



*pôles*. Si le point  $M$  est assujéti à décrire une certaine courbe, il y a entre ses coordonnées bipolaires  $\rho, \rho_1$  une relation

$$F(\rho, \rho_1) = 0$$

qui est l'équation bipolaire de cette courbe. Réciproquement, toute équation de cette forme représente une courbe.

On peut construire géométriquement le point M en décrivant deux circonférences, l'une du point F pour centre avec  $\rho$  pour rayon, l'autre du point  $F_1$  pour centre avec  $\rho_1$  pour rayon. M sera un point commun à ces deux circonférences. Mais il faut remarquer que ces deux courbes ont un second point commun M' symétrique du premier par rapport à la droite FF<sub>1</sub>. Donc toute courbe dont l'équation a la forme

$$F(\rho, \rho_1) = 0$$

est symétrique par rapport à la droite FF<sub>1</sub>, que nous appellerons pour cela *axe polaire* ou *focal*.

Soit O le milieu de FF<sub>1</sub>; considérons deux axes rectangulaires : Ox dirigé suivant OF et Oy; soient  $x, y$  les coordonnées cartésiennes du point M par rapport à ces deux axes; on a, en posant OF =  $c$ , OF<sub>1</sub> =  $-c$ ,

$$(1) \quad \begin{cases} \rho^2 = (x - c)^2 + y^2, \\ \rho_1^2 = (x + c)^2 + y^2. \end{cases}$$

système d'équations déterminant  $\rho$  et  $\rho_1$  en fonction de  $x$  et  $y$ . Ces formules servent à transformer l'équation bipolaire

$$F(\rho, \rho_1) = 0$$

en l'équation cartésienne

$$F[\sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \sqrt{(x + c)^2 + y^2}] = 0.$$

Il est facile d'en déduire des équations permettant d'opérer la transformation inverse, car les équations (1) soustraites l'une de l'autre, membre à membre, donnent

$$x = \frac{\rho_1^2 - \rho^2}{4c},$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} y^2 = \rho^2 - \frac{(\rho_1^2 - \rho^2 - 4c^2)^2}{16c^2} = \frac{16c^2\rho^2 - (\rho_1^2 - \rho^2 - 4c^2)^2}{16c^2}, \\ y^2 = \frac{(\rho + \rho_1 + 2c)(\rho - \rho_1 + 2c)(\rho_1 + \rho - 2c)(\rho_1 - \rho + 2c)}{16c^2}. \end{cases}$$



Il est facile de trouver, en fonction de  $\rho$  et  $\rho_1$ , la distance  $\rho'$  d'un point M à un autre point F' de l'axe polaire. Soit, en effet,  $OF' = c'$  et soit  $m$  la projection de M sur l'axe; on a successivement

$$\rho^2 = (c' - c)^2 + \rho'^2 - 2(c' - c)\overline{mF'},$$

$$\rho_1^2 = (c' + c)^2 + \rho'^2 - 2(c' + c)\overline{mF'};$$

éliminons  $\overline{mF'}$  entre les deux équations et nous aurons

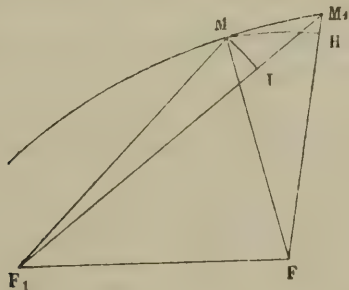
$$(c' + c)\rho^2 - (c' - c)\rho_1^2 = 2c\rho'^2 + (c' - c)^2(c' + c) - (c' - c)^2(c' + c),$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad 2c\rho'^2 = (c' + c)\rho^2 - (c' - c)\rho_1^2 + 2c(c'^2 - c^2).$$

II. *Tangente à la courbe.* — Soient M, M<sub>1</sub> deux points voisins,  $(\rho, \rho_1)$ ,  $(\rho + \Delta\rho, \rho_1 + \Delta\rho_1)$  leurs coordonnées : nous supposons, pour fixer les idées,  $\Delta\rho$  et  $\Delta\rho_1 > 0$ .

Fig. 2.



Décrivons du point F comme centre l'arc MH, et du point F<sub>1</sub> comme centre l'arc MI; nous aurons

$$M_1H = \Delta\rho, \quad IM_1 = \Delta\rho_1.$$

Or, dans les triangles MHM<sub>1</sub> et MIM<sub>1</sub>,

$$\frac{\Delta\rho}{MM_1} = \frac{\sin \widehat{HMM_1}}{\sin \widehat{MHM_1}}, \quad \frac{\Delta\rho_1}{MM_1} = \frac{\sin \widehat{IMM_1}}{\sin \widehat{MIM_1}};$$

donc, en divisant,

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_1} = \frac{\sin \widehat{HMM}_1}{\sin \widehat{IMM}_1} \frac{\sin \widehat{MIM}_1}{\sin \widehat{MHM}_1}.$$

Lorsque le point  $M_1$  tend à se rapprocher du point  $M$  la corde  $MM_1$  devient tangente en ce dernier point, les angles  $MIM_1$  et  $MHM_1$  sont droits, et si l'on désigne par  $V$  et  $V_1$  les angles que fait la tangente dirigée vers  $M$ , avec les rayons  $FM$  et  $F_1M$  prolongés, on a

$$\lim \widehat{HMM}_1 = \frac{\pi}{2} - V, \quad \lim \widehat{IMM}_1 = \frac{\pi}{2} - V_1;$$

donc

$$(4) \quad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\cos V}{\cos V_1};$$

cette formule détermine la position de la tangente.

**THÉORÈME.** — *Les projections d'un segment quelconque de la tangente sur les rayons vecteurs sont dans le même rapport que les différentielles des rayons vecteurs du point de contact.*

Car les projections du segment  $h$  sont  $h \cos V$ ,  $h \cos V_1$ , et l'on a

$$\frac{h \cos V}{h \cos V_1} = \frac{d\rho}{d\rho_1}.$$

Si l'on désigne par  $U$ ,  $U_1$  les angles que fait la normale avec les rayons vecteurs, on a

$$U = \frac{\pi}{2} - V, \quad U_1 = \frac{\pi}{2} - V_1;$$

donc

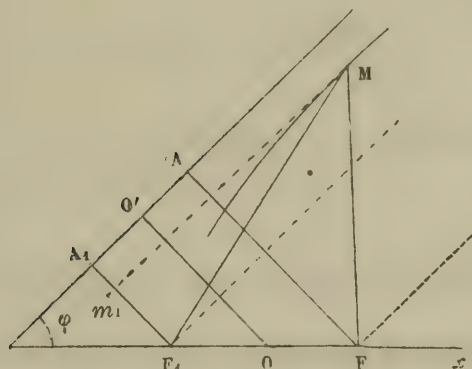
$$(4') \quad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\sin U}{\sin U_1}.$$

Les formules (4) et (4') établies au cas où  $\Delta \rho$  et  $\Delta \rho_1$

sont  $> 0$  sont vraies dans tous les cas, comme on pourrait le démontrer par une analyse directe.

III. *Asymptote.* — Soit M un point qui s'éloigne

Fig. 3.



indéfiniment sur une branche de courbe; dans le triangle  $MF_1F$ , nous avons

$$\rho^2 = 4c^2 + \rho_1^2 - 4c\rho_1 \cos \widehat{MF_1F},$$

d'où

$$\cos \widehat{MF_1F} = \frac{\rho_1^2 - \rho^2 + 4c^2}{4c\rho_1}.$$

Lorsque le point M s'éloigne indéfiniment,  $\rho$  et  $\rho_1$  tendent simultanément vers  $\infty$ , mais les rayons  $FM, F_1M$  tendent vers des positions limites qui sont parallèles à la direction asymptotique. On a donc alors

$$(5) \quad \cos \varphi = \lim \cos \widehat{MF_1F} = \lim \frac{\rho_1^2 - \rho^2 + 4c^2}{4c\rho_1};$$

$\varphi$  est l'inclinaison de la direction asymptotique de l'axe polaire.

Réciproquement, si  $\frac{\rho_1^2 - \rho^2 + 4c^2}{4c\rho_1}$  a une limite finie comprise entre  $-1$  et  $+1$ , lorsque  $\rho_1$  et  $\rho$  tendent à la fois vers  $\infty$ , cette limite peut être considérée comme



le cosinus d'un angle  $\varphi$  qui est l'inclinaison de la direction asymptotique sur l'axe polaire.

Pour déterminer la position de l'asymptote, abaissons du point  $F_1$  une perpendiculaire  $F_1 A_1$  sur cette asymptote, et du point  $M$  la perpendiculaire  $M m_1$  sur  $F_1 A_1$ , nous avons

$$\lim m_1 F_1 = A_1 F_1;$$

or

$$\begin{aligned} F_1 m_1 &= \varphi_1 \sin F_1 M m_1 = \varphi_1 \sin (M F_1 F - \varphi) \\ &= \varphi_1 (\sin M F_1 F \cos \varphi - \cos M F_1 F \sin \varphi), \end{aligned}$$

d'où

$$(6) \quad A_1 F_1 = \lim \varphi_1 (\sin M F_1 F \cos \varphi - \cos M F_1 F \sin \varphi);$$

de même on pourra prendre, pour déterminer la position de l'asymptote,

$$AF = \lim \varphi \sin (MF x - \varphi),$$

et aussi

$$\begin{aligned} OO' &= \frac{1}{2} (AF + A_1 F_1) \\ &= \frac{1}{2} \lim \varphi \sin (MF x - \varphi) + \frac{1}{2} \lim \varphi_1 \sin (M F_1 F - \varphi). \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'une de ces trois limites existe quand  $\varphi$  et  $\varphi_1$  tendent simultanément vers  $\infty$ , elle déterminera la position de l'asymptote.

IV. *Cas particuliers.* — Je vais appliquer les considérations précédentes à l'étude de quelques courbes.

1° J'étudierai d'abord les courbes représentées par l'équation

$$\varphi + m \varphi_1 = 2a,$$

dans laquelle  $a$  est une longueur et  $m$  un paramètre positif ou négatif. Ce sont les *ovales de Descartes*. En différentiant l'équation, on trouve

$$d\varphi + m d\varphi_1 = 0.$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\cos V}{\cos V_1} = -\frac{1}{m}.$$

Dans les ovales cartésiens, le rapport des projections d'un segment de la tangente sur les rayons vecteurs est constant, et cette propriété est caractéristique de ces courbes.

On a encore

$$\begin{aligned} \cos MF_1 F &= \frac{\rho_1^2 - (2a - m\rho_1)^2 + 4c^2}{4c\rho_1} \\ &= \frac{(1 - m^2)\rho_1^2 + 4am\rho_1 + 4(c^2 - a^2)}{4c\rho_1}. \end{aligned}$$

Si  $m^2 \geq 1$ , ce que nous supposons tout d'abord,  $\cos MF_1 F$  n'a pas de limite : donc les ovales n'ont pas d'asymptote.

Les ovales coupent l'axe  $Oy$  au point pour lequel

$$\rho = \rho_1 = \frac{2a}{m+1},$$

et l'axe polaire aux points

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{2(a-c)}{m+1}, \\ \rho_1 = \frac{2(a+c)}{m+1}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{2(a+c)}{m+1}, \\ \rho_1 = \frac{2(a-c)}{m+1}. \end{array} \right.$$

La distance  $\rho'$  d'un point de la courbe à un point  $F'$  de l'axe polaire est déterminée par la formule (3)

$$2c\rho'^2 = (c' + c)\rho^2 - (c' - c)\rho_1^2 + 2c(c'^2 - c^2),$$

c'est-à-dire, en éliminant  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} 2c\rho'^2 &= (c' + c)(2a - m\rho_1)^2 - (c' - c)\rho_1^2 + 2(c'^2 - c^2)c, \\ 2c\rho'^2 &= [(c' + c)m^2 - (c' - c)]\rho_1^2 - 4am(c' + c)\rho_1 \\ &\quad + 4a^2(c' + c) + 2c(c'^2 - c^2) = 0. \end{aligned}$$

Le second membre est une fonction du second degré de  $\rho_1$  : on peut chercher à rendre ce polynôme carré parfait; il suffit, pour cela, qu'on prenne

$$4a^2m^2(c' + c)^2 - [4a^2(c' + c) - 2c(c'^2 - c^2)] \\ \times [m^2(c' + c) - (c' - c)] = 0,$$

ou

$$(c'^2 - c^2) [4a^2 + 2c(c' - c) - 2c(c' + c)m^2] = 0.$$

$c'^2 - c^2 = 0$  donne comme solutions singulières

$$c' = c,$$

$$c' = -c,$$

c'est-à-dire les deux foyers déjà existants; le second facteur donne

$$c' = \frac{c^2(1 + m^2) - 2a^2}{(1 - m^2)c};$$

cette condition remplie, l'équation en  $\rho_1$  et  $\rho'$  devient alors

$$2c\rho'^2 = \frac{2a^2}{c}\rho_1^2 - 8am\frac{c^2 - a^2}{(1 - m^2)c}\rho_1 + \frac{8(c^2 - a^2)^2m^2}{(1 - m^2)^2c},$$

ou

$$c^2\rho'^2 = \left[ a\rho_1 - \frac{2(c^2 - a^2)m}{1 - m^2} \right]^2,$$

ou enfin

$$a\rho_1 \pm c\rho' = \frac{2m(c^2 - a^2)}{1 - m^2}.$$

THÉOREME. — *Le point F' déterminé par*

$$c' = \frac{c^2(1 + m^2) - 2a^2}{(1 - m^2)c}$$

*est un troisième foyer pouvant s'associer à l'un de ceux qui existent déjà.*

THÉOREME. — *Les ovales cartésiens sont le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux cercles fixes est constant.*



En effet, posons

$$2a = mR_1 - R,$$

nous aurons

$$\rho + m\rho_1 = mR_1 - R,$$

ou bien

$$\frac{\rho + R}{R_1 - \rho_1} = m.$$

En particulier, considérons les points tels que le rapport de leurs distances aux deux foyers est constant. Tous ces points sont sur l'ovale cartésien

$$\rho = m\rho_1, \quad (a = 0).$$

Cet ovale, comme nous l'avons démontré plus haut, a un troisième foyer  $F'$  déterminé par

$$c' = \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \cdot c,$$

et si l'on associe ce foyer à  $F_1$ , l'équation de l'ovale devient

$$c\rho' = \frac{2m(c^2 - a^2)}{(1 - m^2)}.$$

Cet ovale est donc un cercle dont  $F'$  est le centre, résultat déjà connu géométriquement.

2° J'ai tout d'abord écarté le cas où  $m^2 = 1$ . Je reviens maintenant à cette hypothèse pour étudier successivement les deux courbes

$$\rho + \rho_1 = 2a,$$

$$\rho - \rho_1 = 2a.$$

La première courbe est une ellipse que son équation définit tout entière. La tangente est déterminée par la relation

$$\frac{\cos V}{\cos V_1} = -1 :$$

elle fait donc des angles égaux avec les rayons vecteurs,

et réciproquement. Il n'y a pas d'asymptote, car

$$\cos MF_1F = \frac{(\rho_1 - \rho)2a + 4c^2}{4c\rho_1} = \frac{(\rho_1 - a)a + c^2}{c\rho_1},$$

$\lim \cos MF_1F = \frac{a}{c}$ , mais  $a > c$  : donc l'angle limite  $\varphi$  n'existe pas. Le grand axe de la courbe est  $2a$ , le petit axe  $2\sqrt{a^2 - c^2} = 2b$ .

La deuxième courbe est une branche d'hyperbole entourant le foyer  $F_1$ ; pour avoir l'autre branche, il faut associer à l'équation

$$\rho - \rho_1 = 2a$$

l'équation

$$\rho_1 - \rho = 2a,$$

de sorte que la courbe entière serait représentée par l'équation unique

$$(\rho - \rho_1)^2 - 4a^2 = 0.$$

La tangente est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, car

$$\frac{\cos V}{\cos V_1} = 1.$$

On a

$$\cos \widehat{MF_1F} = \frac{(\rho_1 + \rho)2a + 4c^2}{4c\rho_1} = \frac{a(\rho_1 - a) + c^2}{c\rho_1},$$

$\lim \cos \widehat{MF_1F} = \frac{a}{c}$ ,  $a$  étant  $< c$  : il y a donc une direction asymptotique déterminée par  $\cos \varphi = \frac{a}{c}$ . Pour trouver la position de l'asymptote, posons

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

nous avons alors

$$\cos \widehat{MF_1F} = \frac{a\rho_1 + b^2}{c\rho_1}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{c},$$

$$\sin \widehat{MF_1F} = \frac{1}{c\rho_1} \sqrt{c^2\rho_1^2 - (a\rho_1 + b^2)^2}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{c},$$

donc

$$F_1 m_1 = \frac{b}{c} [a\sqrt{\rho_1^2 - 2a\rho_1 - b^2} - (a\rho_1 + b^2)];$$

en multipliant et divisant par la quantité conjuguée, on trouve facilement

$$F_1 m_1 = -\frac{b}{c} \frac{2a\rho_1(a^2 + b^2) + b^2(a^2 + b^2)}{a\sqrt{\rho_1^2 - 2a\rho_1 - b^2} + a\rho_1 + b^2},$$

d'où, en passant à la limite,

$$F_1 A_1 = \lim F_1 m_1 = -b = -c \sin \varphi.$$

L'asymptote passe par le point O, centre de la courbe. Il y en aura une seconde symétrique par rapport à l'axe polaire.

3° Tout cercle ayant son centre sur l'axe polaire peut être représenté par une équation de la forme

$$a\rho^2 + b\rho_1^2 = r^2,$$

$a, b$  étant des nombres positifs ou négatifs. En effet, si l'on calcule, d'après la formule (3), la distance d'un point de cette courbe à un point fixe  $F'$  de l'axe polaire, on trouve

$$\begin{aligned} 2c\rho'^2 &= (c' + c)\rho^2 - (c' - c) \frac{r^2 - a\rho^2}{b} + 2c(c'^2 - c^2) \\ &= \left[ c' + c + \frac{a}{b}(c' - c) \right] \rho^2 + 2c(c'^2 - c^2) - (c' - c) \frac{r^2}{b}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit  $c'$  de façon que le coefficient de  $\rho^2$  soit nul,

$$c' = c \frac{(a - b)}{a + b},$$

il vient

$$\rho'^2 = \frac{1}{(a + b)^2} [b(a + b)r^2 - 4c^2ab],$$

équation d'un cercle dont  $F'$  est le centre, et le rayon a



pour valeur  $\sqrt{\frac{b(a+b)r^2 - 4c^2ab}{a+b}}$ ; en particulier, pour  $a = b$ , on a

$$c' = 0,$$

$$\rho'^2 = \frac{r^2 - 2ac^2}{2a} = \frac{\rho^2 + \rho_1^2 - 2c^2}{2}.$$

Le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes est constante est donc un cercle ayant pour centre le milieu de la distance des points fixes.

4° On appelle *ovale de Cassini* le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes est constant.

L'équation polaire de cette courbe est donc

$$\rho\rho_1 = a^2;$$

les points où elle coupe l'axe polaire sont donnés par

$$\rho = \rho_1 = \pm a;$$

il y a donc trois cas à distinguer :

$a < c$  : la courbe ne coupe pas l'axe  $O\gamma$  et se compose de deux ovales séparés entourant chacun un foyer ;

$a = c$  : la courbe coupe l'axe polaire au point  $O$  et porte alors le nom de *lemniscate* ;

$a > c$  : les deux ovales se sont confondus en un seul qui entoure les deux foyers.

Si on différentie l'équation de la courbe, on trouve

$$\rho_1 d\rho + \rho d\rho_1 = 0,$$

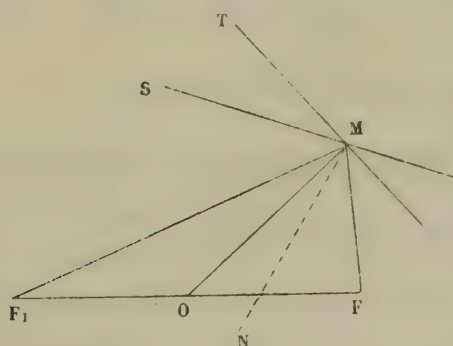
donc

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\cos V}{\cos V_1} = -\frac{\rho}{\rho_1}.$$

De cette formule ressort une construction simple de la tangente en un point  $M$  de la courbe : il suffit, en effet,

de mener  $MT'$  perpendiculaire à  $OM$  et de prendre la sy-

Fig. 4.



métrique  $MS$  de  $MT$  par rapport à la bissectrice  $MN$  de l'angle  $FMF_1$ .

Les points où la tangente est parallèle à l'axe polaire sont ceux où l'on a aussi

$$\rho \sin V = \rho_1 \sin V_1 :$$

donc, en ces points,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\sin V_1}{\sin V} = - \frac{\cos V}{\cos V_1} ;$$

de là résulte

$$\cos V \sin V + \cos V_1 \sin V_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$V = V_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Le lieu de ces points est donc la circonférence qui a  $O$  pour centre et  $OF = OF_1 = c$  pour rayon.

5° Le système des coordonnées bipolaires est quelquefois utile pour faire apercevoir des propriétés de certaines courbes définies par rayons vecteurs, et simplifier dans certains cas la recherche de leur équation cartésienne.

Ainsi les courbes définies par l'équation

$$\frac{1}{a^2 \rho^2} + \frac{1}{b^2 \rho_1^2} = \frac{1}{K^4}$$

ne sont autre chose que les courbes

$$a^2 b^2 \rho^2 \rho_1^2 - a^2 \rho^2 K^4 - b^2 \rho_1^2 K^4 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a^2 \rho^2 - K^4)(b^2 \rho_1^2 - K^4) = K^8,$$

ou enfin

$$\left(\rho^2 - \frac{K^4}{a^2}\right)\left(\rho_1^2 - \frac{K^4}{b^2}\right) = \frac{K^8}{a^2 b^2}.$$

Ces courbes sont donc le lieu géométrique des points tels que le produit de leurs puissances par rapport à deux cercles ayant respectivement  $F$  et  $F_1$  pour centres et  $\frac{K^2}{a}$ ,  $\frac{K^2}{b}$  pour rayons, soit constant. Ce lieu est le même que celui des points tels que le produit des tangentes qui en sont menées aux deux cercles soit aussi constant.

Lorsque  $a = b$ , l'équation de ces courbes devient, en posant  $\frac{K^2}{a} = h$ ,

$$(\rho^2 - h^2)(\rho_1^2 - h^2) = h^4,$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Le lieu des points tels que le produit des tangentes qui en sont menées à deux cercles égaux est égal au carré du rayon de ces cercles jouit donc de la propriété suivante :

*La somme des carrés des inverses des rayons vecteurs est constante.*



# GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA SURFACE DE L'ONDE;

PAR UN ABONNÉ.

On sait, comme l'a fait voir M. Mac-Cullagh, que si par le centre  $o$  d'un ellipsoïde on mène un plan  $\omega$  contenant la normale du point  $m(x, y, z)$  et, dans ce plan, une droite  $o\mu$  égale et perpendiculaire à  $om$ , la surface de l'onde est le lieu des points  $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ , et les normales aux points correspondants  $m$  et  $\mu$  sont dans le même plan. Il est facile de reconnaître que cette dernière propriété subsiste pour le cas plus général où l'on suppose

$$om = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}) = f(u).$$

En effet, la recherche du lieu se ramène à l'élimination de  $x, y, z$  entre les équations

$$\begin{aligned} (1) \quad & px^2 + qy^2 + rz^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = f^2(u), \\ & \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ (2) \quad & \alpha(q - r)yz + \beta(r - p)zx + \gamma(p - q)xy = 0. \end{aligned}$$

Remplaçons les deux premières par celle-ci

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$P = pf^2(u) - 1, \quad Q = qf^2(u) - 1, \quad R = rf^2(u) - 1.$$

Comme on peut l'écrire

$$Px.x + Qy.y + Rz.z = 0,$$

on en déduit, à l'aide de l'équation (1),

$$\begin{aligned} \frac{x}{\beta Rz - \gamma Qy} &= \frac{y}{\gamma Px - \alpha Rz} = \frac{z}{\alpha Qy - \beta Px} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{f^2[\alpha(q - r)yz + \beta(r - p)zx + \gamma(p - q)xy]}, \end{aligned}$$

et par suite

$$(3) \quad \frac{x}{Px} = \frac{\phi}{Qy} = \frac{\gamma}{Rz},$$

ou bien

$$\left(\frac{x}{P}\right) = \left(\frac{\gamma}{Q}\right) = \left(\frac{z}{R}\right) = \frac{x\phi + \phi\gamma + \gamma z}{\frac{x^2}{P} - \frac{\phi^2}{Q} - \frac{\gamma^2}{R}},$$

ce qui donne, pour l'équation du lieu,

$$(4) \quad \frac{x^2}{P} - \frac{\phi^2}{Q} + \frac{\gamma^2}{R} = 0.$$

équation tout à fait semblable à celle de la surface de l'onde.

Pour trouver la direction de la normale au point  $\mu$ , désignons par  $F(x, \phi, \gamma)$  le premier membre de cette équation; il en résulte

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{dx} = \frac{x}{P} - \frac{x f f'}{u} \left( \frac{p x^2}{P} - \frac{q \phi^2}{Q} - \frac{r \gamma^2}{R} \right).$$

Soit  $\omega$  la valeur commune des rapports (3); elle est égale à

$$\frac{x^2 + \phi^2 + \gamma^2}{Px + Qy\phi + Rz\gamma} = \frac{u^2}{f^2 (px + qy\phi - rz\gamma)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{dx} = \omega \left( x - x \frac{f f' \omega}{u} \right),$$

et semblablement

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\phi} = \omega \left( y - \phi \frac{f f' \omega}{u} \right), \quad \frac{1}{2} \frac{dF}{d\gamma} = \omega \left( z - \gamma \frac{f f' \omega}{u} \right).$$

Or, ces trois demi-dérivées sont respectivement proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale au point  $\mu$ ; les quantités  $(q - r)\gamma z$ ,  $(r - p)zx$ ,  $(p - q)x\gamma$

le sont de même aux cosinus directeurs de l'axe du plan  $\varpi$ , et, comme l'expression

$$\begin{aligned} \left(x - \alpha \frac{ff'\omega}{u}\right)(q - r)yz + \left(y - \beta \frac{ff'\omega}{u}\right)(r - p)zx \\ + \left(z - \gamma \frac{ff'\omega}{u}\right)(p - q)xy \end{aligned}$$

est nulle, la normale au point  $\mu$  est bien située dans le plan qui contient celle du point  $m$ .

Pour la surface de l'onde, M. Mac-Cullagh a démontré que ces normales se coupent à angle droit, mais cela n'a pas lieu généralement. En effet, l'expression

$$\begin{aligned} px \left(x - \alpha \frac{ff'\omega}{u}\right) + qy \left(y - \beta \frac{ff'\omega}{u}\right) \\ + rz \left(z - \gamma \frac{ff'\omega}{u}\right) = 1 - \frac{f'u}{f} \end{aligned}$$

ne s'annule que lorsqu'on a  $f(u) = ku$ ,  $k$  désignant une constante.

On peut observer que la valeur absolue de  $\omega$  représente le rapport des projections de  $op$  et de  $om$  sur le plan tangent à l'ellipsoïde.

Observons encore que l'élimination de  $x, y, z$  entre les équations du système

$$\begin{aligned} ax + \beta y + \gamma z = 0, \quad ayz + bzx + cxy = 0, \\ px^2 + qy^2 + rz^2 = 0, \end{aligned}$$

plus général que celui qui donne l'équation (4), s'exécute aussi très simplement et conduit à la relation

$$(ap\beta\gamma + bq\gamma\alpha + cr\alpha\beta)^2 = H(x^2qr + \beta^2rp + \gamma^2pq),$$

où

$$H = 2ab\alpha\beta + 2bc\beta\gamma + 2ca\gamma\alpha - a^2x^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2.$$



## REMARQUES SUR LE PENDULE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Un pendule circulaire se meut dans un milieu qui lui fait éprouver une résistance constante. La loi de son mouvement est donnée, comme on sait, par la formule

$$\theta + \beta = -(\alpha - \beta) \cos kt,$$

dans laquelle  $\theta$  est l'angle du pendule avec la verticale,  $\alpha$  la valeur absolue de l'amplitude initiale,  $\beta$  et  $k$  des constantes,  $\beta$  dépendant de la résistance du milieu ambiant.

Considérons les angles décrits successivement par le pendule pendant des intervalles de temps égaux  $\tau$ . Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux de ces intervalles consécutifs. Nous avons, par application de la formule précédente,

$$\theta + \omega_1 + \beta = -(\alpha - \beta) \cos k(t - \tau)$$

et

$$\theta + \omega_2 + \beta = -(\alpha - \beta) \cos k(t + \tau).$$

Retranchons la seconde de ces égalités de la première; il nous vient

$$\omega_2 + \omega_1 = -2(\alpha - \beta) \sin kt \sin k\tau,$$

ou, en posant  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ ,

$$\omega = -\frac{2}{k} \sin kt \frac{d\theta}{dt}.$$

Donc :

1. *Les angles décrits successivement par le pendule dans des intervalles de temps égaux sont proportion-*

*nels aux vitesses angulaires du pendule au milieu de chacun de ces intervalles de temps.*

Au lieu de retrancher les égalités précédentes, ajoutons-les; nous avons

$$2(\theta + \beta) + \omega_1 - \omega_2 = -2(\alpha - \beta) \cos kt \cos k\tau.$$

Or,

$$\theta + \beta = -(\alpha - \beta) \cos kt = -\frac{1}{k^2} \frac{d^2\theta}{dt^2};$$

donc

$$-\frac{2}{k^2} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_1 - \omega_2 = -\frac{2}{k^2} \cos kt \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ou

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2}{k^2} (\cos k\tau - 1) \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Par suite :

2. *La différence de deux angles consécutifs décrits par le pendule pendant des intervalles de temps égaux est proportionnelle à l'accélération angulaire du pendule sur la ligne de séparation de ces deux angles.*

Remarquons que, dans un cas comme dans l'autre, la valeur du rapport constant est indépendante de  $\beta$  et, par suite, de la résistance du milieu considéré.

## SOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. PICART.

*Dans un triangle isocèle OAB, l'angle à la base A vaut n fois l'angle au sommet O; déterminer le rapport de la base AB au côté OA.*

Menons les droites qui divisent l'angle A en  $n$  parties

égales, et soient  $I_1, I_2, \dots, I_n$  les points où elles ren-



contrent le côté opposé  $OB$ . Designons par  $a$  le base  $AB$  et par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les droites  $AI_1, AI_2, \dots, AI_n$ .  $x$  est égal à  $a$  et  $x_n$  à  $I$ .

Les triangles semblables  $CAI_1, AII_1$  donnent

$$BI_1 = \frac{ax_1}{a}$$

Par suite, en vertu de la propriété de la bissectrice de l'angle d'un triangle,

$$BI_1 I_2 = \frac{ax_1 x_2}{a}, \quad BI_1 I_n = \frac{ax_1 x_n}{a}$$

$$I_2 I_n = \frac{ax_2 x_n}{a}, \quad BI_n = \frac{ax_n x_n}{a}$$

Mais le triangle  $AI_2 I_n$  en vertu d'une autre propriété connue de la bissectrice  $AI_2$  donne

$$BI_n - BI_2 = \frac{ax_2 x_n}{a}$$

On a de même

$$BI_2 - BI_3 = \frac{ax_3 x_2}{a}$$

$$BI_3 - BI_4 = \frac{ax_4 x_3}{a}$$

$$BI_4 - BI_5 = \frac{ax_5 x_4}{a}$$

$$BI_5 - BI_6 = \frac{ax_6 x_5}{a}$$



De l'équation (1) on pourra tirer  $x_2$ ; de l'équation (2), après la substitution de la valeur de  $x_2$ , on pourra tirer  $x_3$ ; de l'équation (3), après la substitution des valeurs de  $x_2, x_3$ , on pourra tirer  $x_4$ , et ainsi de proche en proche jusqu'à l'équation  $(n-1)$ ; et, en remplaçant ensuite  $x_1$  par  $x$  et  $x_n$  par  $R$ , on aura la relation cherchée entre  $x$  et  $R$ . Mais quelle est la forme générale de cette relation pour une valeur quelconque de  $n$ ? Telle est la question que nous nous proposons de résoudre. Pour cela, il faut intégrer l'équation aux différences

$$(a) \quad x_{n-2}x_n - x_{n-1}^2 = \frac{x_{n-2}x_{n-1}^2x_n}{R^2}.$$

Divisons les deux membres de cette équation par  $x_{n-2}x_{n-1}^2x_n$ ; elle devient

$$\frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_{n-2}x_n} = \frac{1}{R^2},$$

ou, en posant  $\frac{1}{x_n} = y_n$ ,

$$(b) \quad y_{n-1}^2 - y_{n-2}y_n = \frac{1}{R^2}.$$

On voit sans peine que

$$(c) \quad y_n = Ca^n - C'a^{-n},$$

$C, C', a$  étant trois constantes qui satisfont à la relation

$$(d) \quad CC'(a^2 + a^{-2} - 2) = \frac{1}{R^2} = c.$$

En effet,

$$y_{n-1}^2 = C^2a^{2n-2} + C'^2a^{-2n-2} - 2CC'.$$

$$y_{n-2}y_n = C^2a^{2n-2} + C'^2a^{-2n-2} - CC'(a^2 + a^{-2}).$$

d'où

$$y_{n-1}^2 - y_{n-2}y_n = CC'(a^2 + a^{-2} - 2) = \frac{1}{R^2}.$$

L'équation (c) est l'intégrale générale de l'équation (b), puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires.

On tire de (d)

$$a - \frac{1}{a} = \frac{1}{R\sqrt{CC'}}$$

ou

$$a^2 - \frac{a}{R\sqrt{CC'}} - 1 = 0,$$

d'où

$$(e) \quad a = \frac{1 + \sqrt{4R^2CC' + 1}}{R\sqrt{CC'}}.$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (b) est

$$(f) \quad \begin{cases} y_n = R^{-n} C^{1-\frac{n}{2}} C'^{-\frac{n}{2}} (1 + \sqrt{4R^2CC' + 1})^n \\ \quad - R^n C^{\frac{n}{2}} C'^{1+\frac{n}{2}} (1 + \sqrt{4R^2CC' + 1})^{-n}; \end{cases}$$

C et C' sont deux constantes que l'on déterminera par deux valeurs particulières de  $y_n$ , par exemple  $y_0$  et  $y_1$ .

Dans la question qui nous occupe, nous avons donc

$$(g) \quad x_n = \frac{1}{Ca^n - C'a^{-n}},$$

avec la condition

$$CC'(a^2 + a^{-2} - 2) - \frac{1}{R^2} = 0;$$

et comme, pour  $n = 1$  et  $n = 0$ ,  $x_n$  doit être égal à  $x$ , les constantes  $a$ , C, C' sont déterminées par les trois équations

$$(h) \quad \begin{cases} CC'\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{R^2} = 0, \\ C - C' = \frac{1}{x}, \\ Ca - \frac{C'}{a} = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Les deux dernières donnent

$$C = \frac{1}{x(a+1)}, \quad C' = -\frac{a}{x(a+1)};$$

par suite, la première devient

$$-\frac{a}{x^2(a+1)^2} \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{R^2} = 0.$$

ou

$$\frac{(a-1)^2}{ax^2} + \frac{1}{R^2} = 0.$$

ou

$$\left( a + \frac{1}{a} - 2 \right) + \frac{x^2}{R^2} = 0.$$

d'où

$$(i) \quad a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2}.$$

Remplaçant C et C' par leurs valeurs dans (g), on obtient

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\frac{a^n}{x(a+1)} + \frac{a^{-n+1}}{x(a+1)}} = \frac{x(a+1)}{a^n + a^{-n+1}} \\ &= \frac{a^{n-1}x(a+1)}{a^{2n-1} + 1} = \frac{a^{n-1}x}{a^{2n-2} - a^{2n-3} + a^{2n-4} - \dots} \end{aligned}$$

ou

$$(j) \quad x_n = \frac{x}{\left( a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} \right) - \left( a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}} \right) + \left( a^{n-3} + \frac{1}{a^{n-3}} \right) - \dots}$$

Faisons  $x_n = R$  et nous aurons enfin, pour former l'équation cherchée en  $x$  et  $R$ , à éliminer  $\left( a + \frac{1}{a} \right)$  entre les deux équations

$$(k) \quad \begin{cases} a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2}, \\ \left( a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} \right) - \left( a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}} \right) + \left( a^{n-3} + \frac{1}{a^{n-3}} \right) - \dots \\ \quad + (-1)^{p-1} \left( a^{n-p} + \frac{1}{a^{n-p}} \right) + \dots + (-1)^{n-1} = \frac{x}{R}. \end{cases}$$



Pour faire cette élimination, il faut d'abord exprimer  $a^n + \frac{1}{a^n}$  en fonction de  $a + \frac{1}{a}$ .

Or, en posant  $a^n + \frac{1}{a^n} = A_n$ , on a

$$(l) \quad A_{n+1} = A_n \left( a + \frac{1}{a} \right) - A_{n-1}.$$

Comme  $A_0 = 2$  et  $A_1 = a + \frac{1}{a}$ , cette formule permettra de calculer de proche en proche  $A_2, A_3, \dots$ , et l'on aura l'expression générale de  $A_n$  par l'intégration de l'équation linéaire aux différences (l), intégration bien connue à laquelle nous ne nous arrêterons pas. Nous nous bornerons à remarquer que le premier membre de la seconde équation (k) sera du degré  $(n-1)$  en  $a + \frac{1}{a}$ , qu'en l'élevant au carré, puis l'égalant à  $2 - \left( a + \frac{1}{a} \right)$ , valeur de  $\frac{x^2}{R^2}$ , on aura une équation de degré  $2n-2$  en  $a + \frac{1}{a}$  pour déterminer la valeur de cette quantité, et que de cette valeur connue on déduira la valeur de  $\frac{x}{R}$ , par la relation

$$\frac{x^2}{R^2} = 2 - \left( a + \frac{1}{a} \right).$$

D'après la nature de la question géométrique posée,  $\frac{x^2}{R^2}$  doit être plus petit que 1;  $a + \frac{1}{a}$  doit donc être positif et compris entre 1 et 2. Par conséquent, on prendra, parmi les  $2n-2$  racines de l'équation en  $a + \frac{1}{a}$ , celle qui est comprise entre 1 et 2.

Mais on peut se demander pourquoi l'analyse donne, pour déterminer l'unique valeur de  $\frac{x^2}{R^2}$ , une équation du

degré  $2n - 2$ , et quelle est la signification des autres racines de cette équation. On s'en rendra compte en donnant à l'énoncé géométrique de la question le sens plus général suivant :

*Étant donné un point O et une droite  $XnY$ , mener par le point O deux droites également inclinées sur XY, et telles que l'angle qu'elles forment avec XY soit égal à  $n$  fois l'angle O qu'elles font entre elles.*

Dans cet énoncé, l'angle que forme chacune des droites avec XY peut être aussi bien l'angle A du triangle isocèle OAB de la figure, l'angle  $\pi - A$ ,  $2\pi - A$ ,  $3\pi - A$ , ...,  $k\pi - A$ , .... Alors l'angle O doit être égal généralement, non seulement à  $\frac{A}{n}$ , mais à  $\frac{k\pi - A}{n}$ ; par suite, comme  $O + 2A = \pi$ , on doit avoir

$$O = \frac{(2k - 1)\pi}{2n - 1}, \quad A = \frac{(n - k)\pi}{2n - 1},$$

d'où

$$\frac{x^2}{R^2} = \frac{\sin^2 O}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 \frac{(2k - 1)\pi}{2n - 1}}{\sin^2 \frac{(n - k)\pi}{2n - 1}},$$

pour toutes les valeurs entières de  $k, 0, 1, 2, \dots, n - 1, n + 1, n + 2, \dots, 2n - 2$ .

Ce rapport est susceptible de  $2n - 2$  valeurs différentes qui constituent les  $2n - 2$  valeurs de  $\frac{x^2}{R^2}$  fournies par les équations  $(k)$ .

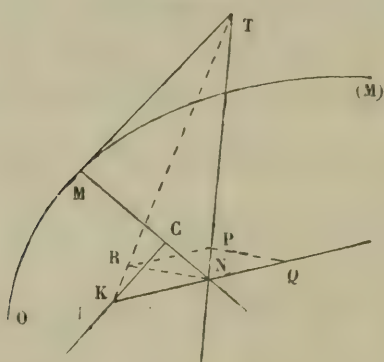
---

# ÉTUDE SUR UN MODE DE DÉTERMINATION DES COURBES PLANES. APPLICATION CINÉMATIQUE ;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,  
Élève de l'École Polytechnique.

1. Sur une courbe quelconque (M) tracée dans un plan, prenons un point fixe O (*fig. 1*). Imaginons un

Fig. 1.



point mobile M se déplaçant d'une façon continue sur la courbe (M), à partir du point O. Pour chaque position du point M tirons la tangente à la courbe (M) et portons sur cette tangente une longueur  $MT = l$ , fonction de la longueur  $s$  de l'arc OM :

$$(1) \quad l = F(s).$$

Nous porterons cette longueur dans le sens du déplacement du point M, ou en sens contraire, suivant qu'elle sera affectée du signe + ou du signe —. Le lieu du point T sera une certaine courbe (T), que nous allons étudier.

2. Voyons d'abord comment, connaissant le centre



de courbure en chaque point de la courbe (M), on peut construire la normale à la courbe (T).

Soient  $d\theta$  l'angle de contingence de la courbe (M) au point M considéré, C le centre de courbure en ce point, N le point où la normale TN cherchée coupe MC.

Nous avons

$$\frac{dl}{d\theta} = NC$$

Or

$$d\theta = \frac{ds}{MC};$$

par suite,

$$\frac{dl}{\frac{ds}{MC}} = NC,$$

ou

$$\frac{dl}{ds} = \frac{NC}{MC},$$

ou encore

$$(2) \quad \frac{NC}{MC} = F'(s).$$

Le point N est ainsi déterminé, et par suite la normale TN.

Remarquons que, dans le cas où  $l$  est constant,  $F'(s)$  étant nul, les points N et C se confondent, ce qu'il était facile de voir *a priori*.

Il est aussi assez intéressant de remarquer que, si l'on représente les variations de la fonction  $l = F(s)$  dans un système de deux axes rectangulaires, les  $s$  étant portés en abscisses et les  $l$  en ordonnées, le rapport  $\frac{NC}{MC}$ , égal à  $F'(s)$ , sera donné par le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe représentative.

3. Le rayon de courbure  $MC = R$  de la courbe (M) est une fonction de l'arc  $s$ :

$$R = \varphi(s).$$

Nous allons voir comment, dans le cas où l'on connaît la nature de cette fonction, on peut construire le centre de courbure de la courbe (T).

Soit I le centre de courbure actuellement inconnu de la développée de la courbe (M) au point C. L'angle de contingence de cette courbe est aussi  $d\theta$ . Nous avons

$$\frac{d \cdot MC}{d\theta} = CI$$

ou

$$\frac{dR}{\frac{ds}{R}} = CI,$$

c'est-à-dire

$$\frac{CI}{R} = \varphi'(s).$$

Le point I est ainsi défini. Nous allons maintenant déterminer la normale NK à la courbe décrite par le point N. Pour cela, remarquons que

$$\frac{d \cdot NC}{d\theta} = KI.$$

Mais nous avons vu que

$$\frac{dl}{d\theta} = NC;$$

donc

$$\frac{dNC}{dl} = \frac{KI}{NC}.$$

Or, d'après (2),

$$NC = MC \cdot F'(s) = \varphi(s) F'(s).$$

La relation précédente devient donc

$$\frac{KI}{NC} = \frac{\varphi'(s) F'(s) + \varphi(s) F''(s)}{F'(s)}.$$

Le point K est ainsi déterminé, et par suite la normale NK.

Nous pouvons maintenant chercher le centre de courbure P de la courbe (T) au point T, c'est-à-dire le point où TN touche son enveloppe.

En effet, en appelant Q le point de rencontre de NK et de la perpendiculaire à TN au point P cherché, nous avons, entre les arcs infiniment petits  $ds$ ,  $ds_1$ ,  $ds_2$  décrits simultanément par les points M, N, T, les relations suivantes :

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{MC}{NK}, \quad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{NQ}{TP}, \quad \frac{ds_2}{ds} = \frac{TN}{MC}.$$

Multipliant ces trois relations membre à membre, nous avons

$$1 = \frac{NQ \cdot TN}{NK \cdot TP}$$

ou

$$\frac{TN}{NK} = \frac{TP}{NQ}.$$

Or, par le point P tirons, parallèlement à NK, PR qui coupe TK en R; nous avons

$$\frac{TN}{NK} = \frac{TP}{PR}.$$

Par suite,

$$PR = NQ.$$

Donc la figure PQNR est un parallélogramme : RN est parallèle à PQ, et, par conséquent, perpendiculaire à TN.

La construction du point P sera donc la suivante : après avoir déterminé, comme nous avons vu, le point I, puis le point K, on tire TK, on élève à TN en N la perpendiculaire NR qui coupe TK en R; par R on mène, parallèlement à KN, RP qui coupe TN en P; P est le centre de courbure demandé.





Les angles MCV et VNV<sub>1</sub> sont donc égaux, ce qui détermine la vitesse du point V.

Nous allons chercher les composantes de cette vitesse le long de MV et de la perpendiculaire VH à MV.

La similitude des triangles MVN et HV<sub>1</sub>V donne

$$\frac{v_1}{VN} = \frac{VH}{MV} = \frac{V_1H}{MN}$$

ou, puisque  $\frac{v_1}{VN} = \frac{v}{R}$ ,

$$\frac{v}{R} = \frac{VH}{v} = \frac{V_1H}{R \left( 1 + \frac{dv}{ds} \right)},$$

d'où

$$VH = \frac{v^2}{R}$$

et

$$V_1H = v + v \frac{dv}{ds}.$$

Or

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt} \frac{1}{v},$$

donc

$$V_1H = v + \frac{dv}{dt},$$

c'est-à-dire que :

1° La composante VH est égale à l'accélération centripète du point M.

2° La composante V<sub>1</sub>H est égale à la somme de la vitesse et de l'accélération tangentielle du point M.

Portons la longueur V<sub>1</sub>I = VM ; nous aurons

$$HI = \frac{dv}{dt}.$$

Puisque HI est égale à l'accélération tangentielle et VH à l'accélération centripète du point M, VI sera, en grandeur et direction, l'accélération totale de ce point.

## CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

En étudiant la question n° 1323 de M. Proth, j'ai trouvé la règle générale que j'ai le plaisir de vous communiquer.

On a le polygone convexe de  $2n - 1$  côtés dont les sommets sont  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}$ , les milieux des côtés consécutifs  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{2n-1} A_1$ ;  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2n-1}$  et la suite des nombres  $1, 2, 3, \dots, (2n - 1)^2$ .

On forme le polygone étoilé  $A_1 A_3 A_5 \dots A_{2n-1} A_2 A_4 \dots A_{2n-2}$  en mettant sur les sommets par l'ordre indiqué les  $2n - 1$  termes de la progression

$$n, n + 2n - 1, n + 2(2n - 1), \dots, n + (2n - 2)(2n - 1).$$

On construit le polygone  $M_{2n-2} M_{2n-4} \dots M_2 M_{2n-1} M_{2n-3} \dots M_1$ , en écrivant sur ses sommets les  $2n - 1$  premiers nombres, laissant en blanc le  $n$  déjà écrit.

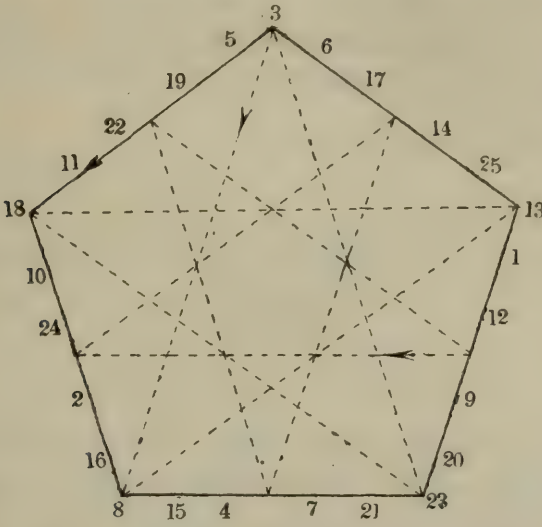
A partir du côté du polygone donné où se trouve le nombre  $k$  en sens  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n-1}$  on écrit successivement sur les autres côtés les nombres

$$\begin{aligned} k + 2n - 1, \quad k + 2(2n - 1), \\ k + 3(2n - 1), \quad \dots, \quad k + (2n - 2)(2n - 1), \end{aligned}$$

$k$  représentant les nombres  $1, 2, 3, \dots, n - 1, n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1$ ; résultant de ces opérations, on partage les  $(2n - 1)^2$  premiers nombres de sorte qu'on lise  $2n$  de chaque côté, ayant la double propriété d'être la somme des nombres appartenant à un même côté égal à  $2n[n^2 + (n - 1)^2]$ , et celle de ses carrés à

$$2n[n^2 + (n - 1)^2]^2 + (4n^2 - 2n + 1) \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{3}.$$

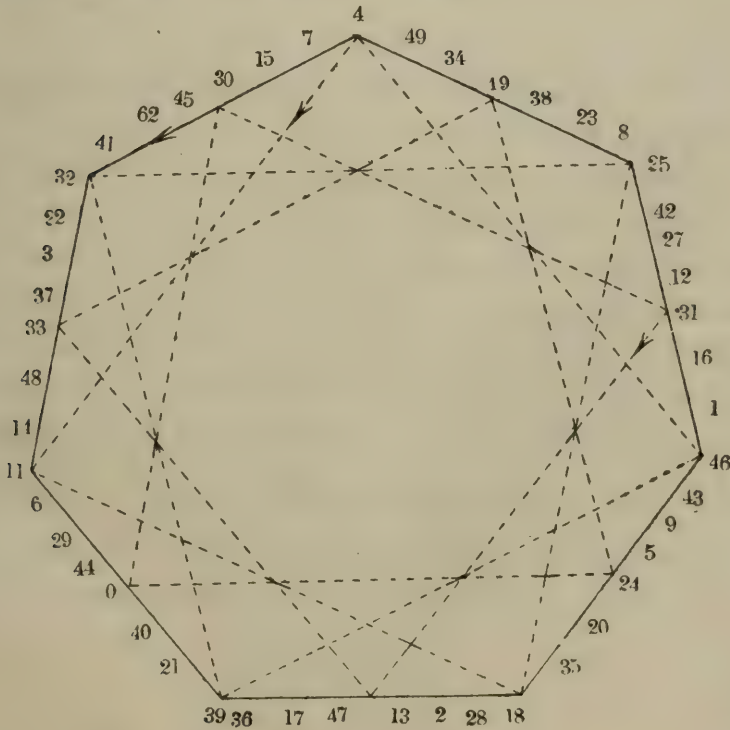
EXEMPLES. — *Application de la règle au pentagone,*  
 $n = 3$  :



$$S_1 = 3 + 6 + 17 + 14 + 25 + 13 = \dots = 78$$

$$S_2 = 3^2 + 6^2 + 17^2 + 14^2 + 25^2 + 13^2 = \dots = 1324.$$

*Application à l'heptagone,  $n = 4$  :*



$$S_1 = 200, \quad S_2 = 6596.$$



Cette règle est applicable aux  $(2n - 1)^2$  termes consécutifs de toute progression arithmétique, et si vous la trouvez digne de figurer dans vos *Annales*, vous pouvez proposer la démonstration.

Agréez, Monsieur, etc.

J. ROMERO (à Bilbao).

## QUESTIONS.

1382. On donne un triangle et la circonférence qui lui est circonscrite. Tangentiellement en  $m$  à cette courbe, on décrit une conique tangente aux trois côtés du triangle donné. Soit  $\mu$  le centre de courbure de cette conique correspondant au point  $m$  : on demande le lieu du point  $\mu$  lorsque  $m$  décrit la circonférence donnée.

(MANNHEIM.)

1383. On donne sur un plan une circonférence de centre  $o$  et un point fixe  $c$ .

On prend un triangle rectangle  $acb$ , dont le sommet de l'angle droit est en  $c$  et dont l'hypoténuse est tangente en  $a$  à la circonférence donnée. On abaisse du sommet une perpendiculaire sur  $ab$ . Cette perpendiculaire rencontre  $ab$  au point  $h$  et elle rencontre en  $i$  la perpendiculaire abaissée de  $b$  sur  $oc$ . Démontrer que, quelle que soit la position de  $acb$ , la quantité  $\frac{1}{ch} \pm \frac{1}{ci}$  est constante. On prend le signe — lorsque  $h$  et  $i$  sont d'un même côté par rapport à  $c$ .

(MANNHEIM.)

# NOTE SUR LES PROPRIÉTÉS DES LIGNES GÉODÉSIQUES ET DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. A. PICART.

Considérons l'un des ellipsoïdes représentés par l'équation

$$(1) \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

où  $b^2$  et  $c^2$  sont des quantités fixes, la première plus petite que la seconde, et  $\rho^2$  un paramètre variable supérieur à  $b^2$  et  $c^2$ ; et proposons-nous de démontrer géométriquement quelques-unes des plus importantes propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de cette surface.

1. Ces lignes jouissent de la propriété fondamentale commune que le produit du demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à la tangente en un de leurs points, par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point, est constant dans toute leur étendue.

Soit d'abord une ligne géodésique G. Imaginons les tangentes MT, M'T' en deux points infiniment voisins M, M', et leurs tangentes conjuguées MS, M'S sur la surface. Par le centre C de l'ellipsoïde menons un plan parallèle au plan tangent en M, et une droite CI, parallèle à MS, qui rencontre la surface en I. La tangente IH à la section elliptique est parallèle à MT. Menons par le même point C un plan parallèle au plan tangent en M' et une droite CK parallèle à M'S; la tangente KL à la section elliptique est parallèle à M'T'. Le plan KCI est parallèle au plan MSM'. De même, le plan des deux

droites IH et KL est parallèle au plan des deux tangentes MT, M'T'. Ce dernier plan, qui est le plan osculateur de la ligne géodésique en M, est perpendiculaire sur le plan tangent MSM'. Donc le plan KCI est perpendiculaire sur le plan IKL. Par conséquent, les perpendiculaires abaissées du point C sur les deux droites IH et KL sont égales.

Menons le demi-diamètre D parallèle à IH. Le parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres CI et D a pour mesure  $D \times p$ ,  $p$  étant la distance de I à D. En multipliant l'aire de ce parallélogramme par la perpendiculaire P abaissée du point C sur le plan tangent en M, on a un produit qui est égal au produit des trois demi-axes de l'ellipsoïde. Or la longueur  $p$  reste constante, lorsqu'on passe du point I au point K. Donc le produit PD est constant.

2. Désignons par  $a'$  et  $b'$  les deux demi-axes de la section elliptique parallèle au plan tangent en M, et par  $i$  l'angle que forme le demi-diamètre D avec le grand axe  $2a'$  : on a

$$D = \frac{a' b'}{\sqrt{a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i}}.$$

Par suite

$$PD = \frac{a' b' P}{\sqrt{a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i}} = \text{const.},$$

d'où, puisque  $a' b' P$  est constant, il résulte pour la ligne géodésique l'équation

$$(2) \quad a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i = \text{const.},$$

$i$  étant l'angle que forme la ligne géodésique en un point M avec l'élément de ligne de courbure parallèle à  $a'$  en ce point.

3. Les demi-axes  $a'$  et  $b'$  peuvent s'exprimer en fonction des paramètres  $\mu^2, \nu^2$  des surfaces homofocales orthogonales représentées par les équations

$$(3) \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1$$

(où  $\mu^2$  est compris entre  $b^2$  et  $c^2$ , et  $\nu^2$  inférieur à  $b^2$  et  $c^2$ ), qui passent par le point M et qui déterminent par leur intersection avec l'ellipsoïde les lignes de courbure de cette surface relatives à ce point.

En effet, considérons une ligne de courbure correspondant au paramètre  $\mu^2$  et la tangente conjuguée en chacun de ses points. Par le centre de l'ellipsoïde menons des parallèles à toutes les tangentes conjuguées. Les points où ces droites rencontrent la surface sont à égale distance du centre. Pour le point N de la ligne de courbure située dans le plan  $xz$ , cette distance est égale au demi-diamètre CH conjugué de CN dans la section elliptique faite par le plan  $xz$ ; or

$$\overline{CN}^2 = \rho^2 + \mu^2 - c^2, \quad CN^2 + \overline{CH}^2 = 2\rho^2 - c^2,$$

d'où

$$\overline{CH}^2 = \rho^2 - \mu^2.$$

Ainsi  $b'^2 = \rho^2 - \mu^2$ , de même  $a'^2 = \rho^2 - \nu^2$ . Remplaçons dans l'équation de la ligne géodésique  $a'^2$  et  $b'^2$  par ces valeurs, nous aurons

$$(5) \quad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.}$$

4. Pour une ligne de courbure, le produit PD est aussi constant, parce que les parallèles à la tangente MT de la courbe en M et à sa conjuguée MS, menées par le



centre de l'ellipsoïde, sont précisément les demi-axes de la section elliptique centrale parallèle au plan tangent en M. Alors  $D\mu$  devient  $a'b'$ ; et  $a'b'P$  étant constant ainsi que  $b'$ , le produit  $a'P$  est constant.

5. Il reste à déterminer la valeur de la constante qui figure dans l'équation de la ligne géodésique.

*Or, toutes les tangentes à une ligne géodésique forment une surface développable qui est circonscrite à une même surface homofocale.*

C'est là une seconde propriété importante des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

Soient MT et M'T' deux tangentes infiniment voisines. Parmi les ellipsoïdes homofocaux, il y en a un dont la normale NA, au point N d'intersection avec MT, est située dans le plan de MT, M'T'. Ce plan est tangent en N à l'une ( $\mu^2 = \alpha^2$ ) des deux surfaces orthogonales qui passent en ce point. Car si l'on imagine le cône circonscrit à l'ellipsoïde (1) du point N, on sait que ce cône a pour axes les normales NA, NB, NC aux trois surfaces orthogonales passant par le point N. Or le plan TMT' mené par la génératrice TM de ce cône lui est normal, comme étant normal à l'ellipsoïde auquel le cône est tangent en M. C'est donc un plan principal du cône, qui dès lors contient l'une des normales NB, NC. Si l'on considère une troisième tangente infiniment voisine des premières de la ligne géodésique, on reconnaîtra qu'en un point N' de M'T', infiniment voisin de N, situé sur la surface ( $\mu^2 = \alpha^2$ ), le plan T'M'T'', contenant la normale NA à l'ellipsoïde homofocal qui passe par le point N', est tangent à cette même surface ( $\mu^2 = \alpha^2$ ). On voit donc que tous les plans osculateurs de la ligne géodésique sont tangents à la surface ( $\mu^2 = \alpha^2$ ).

Il en résulte que la constante de l'équation (5) est

égale à  $\alpha^2$ . Car la surface ( $\mu^2 = \alpha^2$ ) coupe l'ellipsoïde suivant une ligne de courbure à laquelle la ligne géodésique est tangente, et, comme au point de contact  $i$  est égal à zéro, l'équation pour ce point se réduit à  $\mu^2 = \text{const.}$

L'équation de la ligne géodésique est donc

$$(6) \quad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2.$$

C'est une relation entre les coordonnées curvilignes superficielles  $\mu^2$ ,  $\nu^2$  de chacun de ses points et l'angle  $i$  qu'elle forme en ce point avec la ligne de courbure ( $\mu^2 = \text{const.}$ ) passant par ce point.

6. Si l'on revient à l'équation  $PD = \text{const.}$ , commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure de l'ellipsoïde, on peut évaluer sa constante au moyen de  $\alpha^2$ . En effet, elle est égale à

$$\frac{\rho \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{a'^2 \sin^2 i + b'^2 \cos^2 i}},$$

ou à

$$\frac{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - \nu^2) \sin^2 i + (\rho^2 - \mu^2) \cos^2 i}},$$

ou enfin à

$$\frac{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}.$$

Ainsi l'on a

$$(7) \quad PD = \frac{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}.$$

7. Considérons en particulier les lignes géodésiques passant par un ombilic de l'ellipsoïde.

La surface ( $\mu^2 = \alpha^2$ ) à laquelle tous les plans osculateurs d'une ligne géodésique sont tangents se réduit alors à la portion du plan  $xz$  limitée par l'hyperbole

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ . Toutes les tangentes de cette ligne viennent donc rencontrer cette hyperbole, et ses plans osculateurs lui sont tangents.

8. Proposons-nous de trouver l'expression de la différence entre la longueur  $NM = t$  de la portion de tangente à une ligne géodésique ombilicale, limitée par son point de contact  $M$  et par le point où elle rencontre l'hyperbole limite, et la longueur  $OM = s$  de cette ligne comptée de l'ombilic  $O$  jusqu'au point  $M$ .

Si l'on considère une autre tangente  $N'M'$  infiniment voisine, et qu'on désigne par  $\omega$  l'angle que forme la tangente  $NM$  avec la tangente  $NT$  à l'hyperbole, on a

$$d(t - s) = NN' \cos \omega.$$

Pour calculer la valeur de  $\cos \omega$ , nous rappellerons que le cône circonscrit d'un point quelconque  $N$  de l'hyperbole ombilicale à l'ellipsoïde est de révolution autour de  $NT$ , et qu'alors on a à trouver le cosinus de l'angle que forme la tangente en  $N$  à l'hyperbole avec la tangente menée du point  $N$  à l'ellipse  $\left( y = 0, \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1 \right)$ .

Or, si l'on désigne par  $\rho$ , le demi-grand axe de l'ellipse homofocale qui passe par le point  $N$ , par  $r$  et  $r'$  les rayons vecteurs focaux du point  $N$  de cette ellipse, et par  $\alpha$ , l'angle que forme sa normale  $NT$  avec chacun de ces rayons vecteurs, on a, d'une part, dans cette ellipse,

$$4c^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'(1 - 2\cos^2 \alpha),$$

d'autre part, dans l'hyperbole,

$$4b^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.$$

En retranchant ces deux équations membre à membre,

on obtient

$$c^2 - b^2 = rr' (1 - \cos^2 \alpha_1).$$

Cette équation jointe à la première, qui équivaut à cette autre

$$rr' \cos^2 \alpha_1 = \rho_1^2 - c^2,$$

fournit les valeurs de  $rr'$  et de  $\cos^2 \alpha_1$ , soit

$$\cos^2 \alpha_1 = \frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - b^2}, \quad rr' = \rho_1^2 - b^2.$$

Cela posé, la propriété de l'ellipse, en vertu de laquelle le produit des distances des deux foyers à une tangente est égal au carré du petit axe, donne l'équation

$$rr' \sin(\omega - \alpha_1) \sin(\omega + \alpha_1) = \rho^2 - c^2,$$

ou

$$(\rho_1^2 - b^2) (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \omega) = \rho^2 - c^2,$$

ou

$$(\rho_1 - b^2) \left( \frac{\rho_1 - c^2}{\rho_1^2 - b^2} - \cos^2 \omega \right) = \rho^2 - c^2,$$

d'où

$$(8) \quad \cos \omega = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho^2}{\rho_1^2 - b^2}}.$$

9. Quant à  $NN'$ , sa valeur est donnée par la formule qui exprime généralement la distance en un point d'une surface du second ordre à la surface homofocale infiniment voisine. Cette distance n'est autre chose que la variation que subit la distance  $P$  du centre au plan tangent en ce point, lorsque son expression

$$P = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \alpha + (\rho^2 - b^2) \cos^2 \beta + (\rho^2 - c^2) \cos^2 \gamma},$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les angles de la normale avec les axes, varie avec  $\rho$  seulement. On trouve ainsi, en tenant



compte de la relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$(9) \quad dP = \frac{\rho d\rho}{P}.$$

Mais  $P$ , exprimé en fonction de  $\rho^2, \mu^2, \nu^2$ , est égal à

$$\sqrt{\frac{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}.$$

Donc, généralement, en un point quelconque d'une surface  $(\rho)$ , on a

$$(10) \quad dP = \frac{d\rho \sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Pour le point  $N$  situé dans le plan  $xz$ , où  $\rho = \rho_1$ ,  $\mu^2 = \nu^2 = b^2$ ; on a donc

$$(11) \quad NN' = d\rho \sqrt{\frac{\rho_1^2 - b^2}{\rho_1^2 - c^2}}.$$

10. Substituant les valeurs de  $\cos \omega$  et de  $NN'$  dans la valeur de  $d(t - s)$ , on obtient

$$(12) \quad d(t - s) = \frac{d\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

On peut exprimer cette différentielle en fonction de  $\omega$ . On a, en effet,

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega}}{\sin \omega},$$

d'où

$$\sqrt{\rho_1^2 - c^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega - c^2 \sin^2 \omega}}{\sin \omega},$$

$$\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} = \frac{\cos \omega \sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sin \omega},$$

$$d\rho_1 = - \frac{(\rho^2 - b^2) \cos \omega d\omega}{\sin \omega \sqrt{\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega}};$$

par suite

$$(13) \quad d(t-s) = - \frac{(\rho^2 - b^2)^2 \cos^2 \omega d\omega}{\sin^2 \omega \sqrt{(\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega)(\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega - c^2 \sin^2 \omega)}}.$$

L'intégration donne

$$\begin{aligned} t-s &= \int_{\rho}^{\rho_1} d\rho_1 \frac{\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - c^2}} \\ &= \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\rho_1^2 d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2 - \rho^2)(\rho_1^2 - c^2)}} - \rho^2 \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2 - \rho^2)(\rho_1^2 - c^2)}}. \end{aligned}$$

En posant  $\rho_1 = cx$ ,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} t-s &= \frac{c^2}{\rho} \int_{\frac{\rho}{c}}^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{c^2}{\rho^2}x^2\right)}} \\ &\quad - \rho \int_{\frac{\rho}{c}}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{c^2}{\rho^2}x^2\right)}}. \end{aligned} \right.$$

On voit que  $t-s$  s'exprime au moyen des transcendentes elliptiques de première et de seconde espèce.

11. Nous terminerons ce qui est relatif aux lignes géodésiques de l'ellipsoïde par la recherche de l'angle que forme le plan osculateur d'une ligne géodésique ombilicale avec le plan des ombilics.

Le plan osculateur en M est MNT, ou M'N'T; le plan osculateur en M' est M'N'T'.

Désignons par  $\theta$  l'angle que le plan osculateur fait avec le plan des ombilics.

Le trièdre qui a son sommet en N' et pour faces M'N'T, M'N'T', T'N'T donne

$$\frac{\sin(\theta + d\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin \omega}{\sin M'N'T'}.$$

Posons  $M'N'T' = \omega - u$ ,  $T'N'T = \varepsilon$ ; on a

$$u = \varepsilon \cos \theta, \quad \frac{\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \omega - \sin(\omega - u)}{\sin \omega},$$

ou

$$\frac{\cos \theta \cdot d\theta}{\sin \theta} = \frac{u \cos \omega}{\sin \omega} = \frac{\varepsilon \cos \theta \cdot \cos \omega}{\sin \omega},$$

ou

$$(15) \quad \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{\varepsilon \cos \omega}{\sin \omega};$$

$\varepsilon$  est l'angle de contingence de l'hyperbole ombilicale au point  $N$ ; il est égal à  $\frac{NN'}{R}$ ,  $R$  désignant le rayon de courbure de cette courbe en  $N$ .

Or

$$NN' = d\rho_1 \frac{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

12. Quant au rayon de courbure, nous le déduirons de la formule générale du rayon de courbure d'une section normale de l'ellipsoïde en un point  $M$ .

Soient  $d\rho$  le rayon vecteur correspondant de l'indicatrice et  $k$  la distance du plan de l'indicatrice au plan tangent; le rayon de courbure  $r = \frac{d\rho^2}{2k}$ .

Menons le demi-diamètre  $CM$ , et soit  $h$  la portion de ce diamètre comprise entre le point  $M$  et le plan de l'indicatrice. On a

$$h = \frac{k}{\cos \varphi},$$

$\varphi$  étant l'angle que forme  $CM$  avec la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en  $M$ . Menons le demi-diamètre  $CN$  parallèle à  $d\rho$ ; désignons les deux demi-diamètres par  $a'$  et  $b'$ . Le plan  $MCN$  détermine dans

l'ellipsoïde une ellipse ayant pour diamètres conjugués CM et CN ; on a dans cette ellipse

$$\frac{(a' - h)^2}{a'^2} + \frac{d\rho^2}{b'^2} = 1,$$

ou

$$\frac{2h}{a'} = \frac{d\rho^2}{b'^2};$$

donc

$$r = \frac{2hb'^2}{2ka'} = \frac{b'^2}{a' \cos \varphi},$$

ou

$$(16) \quad r = \frac{b'^2}{P},$$

P étant la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.

En appliquant cette formule générale, on aura

$$R = \frac{d^2}{P};$$

or

$$d^2 = \rho_1^2 - b^2, \quad P = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}},$$

d'où

$$R = \frac{(\rho_1^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{c^2 - b^2}};$$

par suite

$$\varepsilon = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\rho_1^2 - b^2} \frac{d\rho^1}{\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

Mais

$$\cos \omega = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho^2}{\rho_1^2 - b^2}},$$

d'où

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{\rho^2 - b^2}{\rho_1^2 - b^2}}.$$



Donc on a

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{b \sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \cdot \frac{d\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{(\rho_1^2 - b^2) \sqrt{\rho_1^2 - c^2}},$$

ou

$$(17) \quad d \log \tan \frac{\theta}{2} = \frac{b \sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \cdot \frac{d\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}}{(\rho_1^2 - b^2) \sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

On pourrait, comme précédemment, exprimer cette différentielle en fonction de  $\omega$  et  $d\omega$ . On trouverait ainsi

$$(18) \quad d \log \tan \frac{\theta}{2} = - \frac{b \sqrt{c^2 - b^2} \cos^3 \omega d\omega}{\sqrt{(\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega)(\rho^2 - b^2 \cos^2 \omega - c^2 \sin^2 \omega)}},$$

et, en intégrant par rapport à  $\rho_1$  de  $\rho$  à  $\rho_1$  et conséquemment par rapport à  $\omega$  de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\omega$ , on obtiendrait

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \tan \frac{\theta}{2} - \log \tan \frac{\theta_0}{2} = - b \sqrt{c^2 - b^2} \\ \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{(\rho^2 \tan^2 \omega + \rho^2 - b^2)[(\rho^2 - c^2) \tan^2 \omega + \rho^2 - b^2]}} \end{array} \right.,$$

$\theta_0$  étant l'angle de la ligne géodésique avec le plan ombilical à l'ombilic.

13. Démontrons maintenant quelques propriétés des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Nous avons vu que, le long d'une ligne de courbure, on a

$$PD = \text{const.}$$

Le rayon de courbure, étant  $\frac{D^2}{P}$ , est alors égal à  $\frac{\text{const}}{P^3}$ . Il est donc proportionnel au cube de la distance de la surface à la surface homofocale infiniment voisine.

Si l'on considère une ligne de courbure de l'ellipsoïde,

le demi-diamètre parallèle à la tangente conjuguée en chaque point est constant : donc le rayon de courbure de la section principale perpendiculaire à la ligne de courbure considérée varie proportionnellement à la distance de la surface à la surface infiniment voisine.

De ces deux propositions découle la suivante :

*Suivant toute ligne de courbure d'un ellipsoïde, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal.*

14. Considérons un quadrilatère  $A_0 A_1 A_2 A_3$ , formé par quatre lignes de courbure. Soient  $a_0, a_1, a_2, a_3$  les distances de la surface proposée à la surface homofocale infiniment voisine aux points  $A_0, A_1, A_2, A_3$  ; soient  $R_0, R_1, R_2, R_3$  les rayons de courbure principaux de la surface aux mêmes points, suivant  $A_0 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_0$ . Nous avons, d'après ce qui précède,

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{a_0^3}{a_1^3},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{a_2^3}{a_3^3},$$

$$\frac{R_3}{R_0} = \frac{a_3^3}{a_0^3};$$

multipliant les égalités membre à membre, il vient

$$(20) \quad a_0^2 a_2^2 = a_1^2 a_3^2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

Ainsi, si sur une surface du second degré on considère un rectangle formé par quatre lignes de courbure, les distances des sommets de ce rectangle à la surface du

second degré homofocale infiniment voisine forment une proportion.

15. Enfin démontrons que les lignes circulaires de l'ellipsoïde en un point sont également inclinées sur chacune des lignes de courbure qui passent par ce point.

Le rayon de courbure d'une section normale est  $\frac{D^2}{P}$ , D étant le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à la tangente et P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent; or D et P sont les mêmes pour les deux sections circulaires : donc les rayons de courbure des sections normales dirigées suivant les tangentes aux lignes circulaires en leur point d'intersection sont égaux. Il en résulte la proposition énoncée.

16. Remarquons que le rayon de courbure d'une section normale le long d'une section circulaire est en raison inverse de la distance du plan tangent au centre.

## DE L'INVOLUTION DE PLUSIEURS POINTS SUR UNE CONIQUE;

PAR M. WEILL.

1. Considérons une conique rapportée à un triangle conjugué; elle aura pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Un point de cette conique est défini par un paramètre  $t$  à l'aide des relations

$$x = z \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = z \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Trois points pris sur cette conique formeront une involution si l'on a, pour définir les valeurs de  $t$  qui leur correspondent, l'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + (a\lambda + b)t + c\lambda + d + 0.$$

En désignant par  $t$  et  $t'$  deux racines de cette équation, on a

$$\frac{t^3 + bt + d}{t^2 + at + c} = \frac{t'^3 + bt' + d}{t'^2 + at' + c},$$

d'où l'on déduit

$$(R) \quad \begin{cases} t^2 t'^2 + att'(t + t') + c(t + t')^2 \\ - (c + b)tt' - d(t + t') + bc - ad = 0. \end{cases}$$

Telle est la relation fondamentale qui lie deux quelconques des trois *éléments* d'une involution du troisième ordre.

Soient A, B, C les trois points considérés sur la conique et soit

$$px + qy - z = 0$$

l'équation du côté CB; les valeurs de  $t$  correspondant à C et B seront données par l'équation

$$2pt + q(1 - t^2) - 1 - t^2 = 0,$$

qui donne

$$t + t' = \frac{2p}{q + 1}, \quad tt' = \frac{1 - q}{1 + q}.$$

Ces valeurs, transportées dans la relation (R), donnent

$$(1) \quad \begin{cases} (1 - q)^2 + a \cdot 2p(1 - q) + c \cdot 4p^2 - (c + b)(1 - q^2) \\ - 2pd(q + 1) + (bc - ad)(1 + q)^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation que nous venons de trouver est l'équation tangentielle de la conique enveloppée par les côtés du triangle ABC. Or, si nous avons choisi pour triangle des



coordonnées le triangle conjugué commun aux deux coniques, l'équation de cette conique enveloppe sera

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - z^2 = 0,$$

et son équation tangentielle

$$(2) \quad p^2\alpha + q^2\beta - 1 = 0.$$

Les équations (1) et (2) devant être identiques, on aura

$$a = d = 0, \quad bc = 1, \\ c = \frac{\alpha}{\beta - 1}, \quad b = \frac{2 + 2\beta - \alpha}{\beta - 1}.$$

La relation  $bc = 1$  donne

$$1 + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 0;$$

c'est la condition pour que les deux coniques

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - z^2 = 0$$

soient *capables* d'un triangle inscrit et circonscrit.

Désignons par  $A_1, B_1, C_1$  les points de contact des côtés du triangle ABC avec son enveloppe; le côté BC ayant pour équation

$$p.x + q.y - z = 0,$$

et la conique enveloppe

$$\frac{1}{(b-1)^2} + q^2 \left( \frac{b+1}{b-1} \right)^2 - 1 = 0,$$

les coordonnées du point  $A_1$  seront

$$x_1 = p \frac{1}{(b-1)^2}, \quad y_1 = q \left( \frac{b+1}{b-1} \right)^2.$$

Or, l'équation du troisième degré en  $t$  étant

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + \frac{\lambda}{b} = 0,$$

on a

$$t + t' + t'' = -\lambda, \quad tt' + tt'' + t't'' = b, \quad tt't'' = -\frac{\lambda}{b};$$

mais

$$t + t' = \frac{2p}{q+1}, \quad tt' = \frac{1-q}{1+q},$$

d'où

$$q = \frac{1-tt'}{1+tt'}, \quad p = \frac{t+t'}{1+tt'},$$

ou, en introduisant la troisième racine  $t''$ ,

$$q = \frac{1-t''^2}{1+t''^2} \frac{1-b}{1+b}, \quad p = t'' \frac{b-1}{1+t''^2}.$$

On en conclut

$$x_1 = \frac{-2}{1-b} \frac{2t''}{1+t''^2}, \quad y_1 = \frac{1+b}{1-b} \frac{1-t''^2}{1+t''^2}.$$

Si donc on désigne par  $x$  et  $y$  les coordonnées du point A, on a les relations remarquables

$$x_1 = \frac{-2x}{1-b}, \quad y_1 = \frac{1+b}{1-b} y.$$

On voit l'analogie, au point de vue analytique, entre la droite AA<sub>1</sub> et la normale à la conique; on trouve facilement l'équation de l'enveloppe des droites AA<sub>1</sub>, BB<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub>, qui est

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}.$$

La transformation homographique rend compte de ce résultat; il suffit de considérer le système de deux co-

niques homofocales capables d'un triangle inscrit et circonscrit  $A_1B_1C_1$  ; dans ce système, les droites  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  sont justement normales à l'ellipse décrite par les points  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ .

En reprenant le problème, proposons-nous de trouver le lieu du point O de concours des droites  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . L'équation de la droite  $AA_1$  est, en désignant par K et L les quantités  $\frac{-2}{1-b}$  et  $\frac{1+b}{1-b}$ ,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2t & 1-t^2 & 1+t^2 \\ 2t.K & L(1-t^2) & 1+t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x t^4 (L-1) - 2 t^3 [y(1-K) + L - K] - 2 t [y(1-K) - (L-K)] + x(1-L) = 0.$$

Cette équation, du quatrième degré en  $t$ , admet pour racines les valeurs  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$  et aussi une valeur  $t'''$  correspondant à la quatrième tangente qu'on peut mener du point O à l'enveloppe des droites  $AA_1$ . On a donc

$$\begin{aligned} b - t''' \lambda &= 0, \\ t''' - \lambda &= \frac{2y(1-K) + 2(L-K)}{x(L-1)}, \\ \frac{-\lambda}{b} + b t''' &= \frac{2y(1-K) - 2(L-K)}{x(1-L)}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x &= \frac{b+3}{b+1} \frac{2\lambda}{b^2 - \lambda^2}, \\ y &= \frac{b+3}{b+1} \frac{(b^2 + \lambda^2)(1-b)}{b^2 - \lambda^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour l'équation du lieu du point O,

$$\left( \frac{y}{1-b} \right)^2 - x^2 = \left( \frac{b+3}{b+1} \right)^2 z^2.$$

II. Nous allons montrer comment on peut passer du triangle inscrit et circonscrit à deux coniques à l'hexagone jouissant de la même propriété.

Soit O le point d'intersection des droites  $x = 0, y = 0$ , en conservant toutes les notations précédentes ; une droite passant par ce point a pour équation

$$y = mx$$

et rencontre la conique

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

en deux points auxquels correspondent les valeurs de  $t$  données par l'équation

$$1 - t^2 - 2mt = 0,$$

et, si  $t'$  et  $t_1$  sont les deux racines, on a

$$t' = \frac{-1}{t_1}.$$

Cela posé, considérons un triangle ABC qui se déplace en restant inscrit et circonscrit aux deux coniques

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - z^2 = 0.$$

Soient  $t, t', t''$  les trois valeurs du paramètre qui correspondent aux sommets A, B, C. Les droites OA, OB, OC rencontrent la première conique en trois autres points A', B', C', auxquels correspondent les valeurs

$$t_1 = \frac{-1}{t}, \quad t'_1 = \frac{-1}{t'}, \quad t''_1 = \frac{-1}{t''}.$$

Les six points A, B, C, A', B', C' sont les sommets d'un hexagone qui se déplace en restant inscrit et circonscrit



à deux coniques ; la première est la conique

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Proposons-nous de trouver l'équation de la seconde.

La droite  $AB'$ , qui correspond aux valeurs  $t$  et  $t'_1$ , a pour équation

$$z = px + qy,$$

et l'on a

$$tt'_1 = \frac{1-q}{1+q}, \quad t + t'_1 = \frac{2p}{1+q}.$$

Mais les valeurs  $t$  et  $t'$  qui correspondent à A et B satisfont à la relation (R), qui est

$$t^2 t'^2 + c(t^2 + t'^2) + (c - b)tt' + 1 = 0,$$

et, comme on a

$$t' = -\frac{1}{t'_1},$$

la relation (R) devient

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{t'^2_1} + c \left( t^2 + \frac{1}{t'^2_1} \right) - (c - b) \frac{t}{t'_1} + 1 &= 0, \\ t^2 + t'^2_1 + ct^2 t'^2_1 + c - (c - b)tt'_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant  $tt'_1$  et  $t + t'_1$  par leurs valeurs en  $p$  et  $q$ , on a, pour l'équation tangentielle de l'enveloppe des côtés de l'hexagone,

$$(3) \quad 4p^2 + q^2(3c - b + 2) + (c + b - 2) = 0;$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets de l'hexagone, et qui n'est autre que la conique enveloppe des côtés du triangle ABC, est

$$(4) \quad 4cp^2 + q^2(c + b + 2) - (c + b - 2) = 0;$$

il faut y joindre la relation  $bc = 1$ .

Les trois valeurs de  $t$ , qui correspondent aux points A, B, C, sont données par l'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + c\lambda = 0;$$

celles qui correspondent aux trois autres sommets sont données par l'équation

$$\frac{-1}{t^3} + \frac{\lambda}{t^2} - \frac{b}{t} + c\lambda = 0.$$

En faisant le produit des premiers membres, mis sous forme entière, et posant

$$\frac{\lambda^2 - b^2}{\lambda} = K,$$

on obtient, pour l'équation qui donne les six sommets,

$$t^6 + Kt^5 + \frac{2-b}{c}t^4 - t^3 \frac{b^2+1}{b}K + t^2 \frac{b-2}{c} + tK - 1 = 0.$$

Si l'on remplace  $c$  par  $\frac{1}{b}$  dans la relation que nous venons de trouver, et si l'on écrit les équations des coniques (3) et (4) en coordonnées homogènes, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Si l'on considère les deux coniques*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

1° *On a un système général de deux coniques telles qu'un triangle soit inscrit à la première et circonscrit à la seconde, et les paramètres qui définissent les trois sommets satisfont à l'équation*

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + \frac{\lambda}{b} = 0;$$

2<sup>o</sup> Les droites qui joignent les sommets du triangle aux points où les côtés opposés touchent leur enveloppe sont tangentes à la courbe

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}};$$

3<sup>o</sup> Le point O de concours de ces droites décrit une conique ayant pour équation

$$\frac{y^2}{(b+3)^2(b-1)^2} - \frac{x^2}{(b+3)^2} - \frac{z^2}{(b+1)^2} = 0.$$

THÉORÈME II. — Si l'on considère les trois coniques

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 0, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} &= 0, \\ \frac{x^2}{4b} + \frac{y^2}{3+2b-b^2} + \frac{z^2}{(b-1)^2} &= 0, \end{aligned}$$

1<sup>o</sup> On a un système général de trois coniques, telles qu'un hexagone soit inscrit à la première et circonscrit à la troisième, en même temps que les droites qui joignent ses sommets de deux en deux restent tangentes à la seconde ;

2<sup>o</sup> Les paramètres qui définissent les sommets de l'hexagone à chaque instant satisfont à l'équation

$$\begin{aligned} t^6 + K t^5 + b(2-b)t^4 - t^3 \frac{b^2+1}{b} K \\ - t^2 b(2-b) + t.K - 1 = 0. \end{aligned}$$

On peut déduire du procédé indiqué la relation qui doit exister entre les invariants  $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$  de deux coniques pour qu'elles soient capables d'un hexagone inscrit et circonscrit; il suffit de former l'équation en  $\lambda$  des deux coniques données plus haut et d'éliminer  $b$  entre

les relations d'identification de cette équation avec l'équation générale

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0.$$

III. On peut envisager le problème de l'hexagone inscrit et circonscrit à deux coniques à un point de vue différent.

Considérons, en effet, trois coniques ayant mêmes points communs et rapportées à leur triangle polaire commun,

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ (2) \quad & \alpha x^2 + \beta y^2 - z^2 = 0, \\ (3) \quad & \alpha' x^2 + \beta' y^2 - z^2 = 0, \end{aligned} \quad [ \dots ]$$

avec la condition

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = \frac{1-\alpha'}{1-\beta'} = A.$$

Déterminons les paramètres  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  de manière que les trois coniques soient telles qu'un hexagone inscrit à la première ait ses côtés tangents à la seconde, pendant que les droites qui joignent ses sommets de deux en deux touchent la troisième. Soit  $O$  le point de rencontre des droites  $x = 0, y = 0$ ; on peut assujettir les diagonales de l'hexagone à passer en ce point; *elles formeront une involution du troisième ordre*, et, si l'une d'elles a pour équation  $y = tx$ , les trois valeurs de  $t$  devront satisfaire à une équation de la forme

$$t^3 + \lambda t^2 + (a\lambda + b)t + c\lambda + d = 0,$$

dans laquelle  $\lambda$  est le seul paramètre variable et définit à chaque instant la position de l'hexagone. Cette équation



tion donne entre deux de ses racines la relation

$$(R) \quad \begin{cases} t^2 t_1^2 + att_1(t + t_1) + c(t^2 + t_1^2) \\ + (c - b)tt_1 - d(t + t_1) + bc - ad = 0. \end{cases}$$

Si une droite AB ayant pour équation  $y = mx$  rencontre la première conique en A et B, les droites OA et OB seront données par l'équation

$$x^2 + y^2 - (lx + my)^2 = 0,$$

et, si l'on pose  $\frac{y}{x} = t$ , cette équation donne

$$tt_1 = \frac{1 - l^2}{1 - m^2}, \quad t + t_1 = \frac{2lm}{1 - m^2}.$$

Ces valeurs, transportées dans la relation (R), donnent

$$(5) \quad \begin{cases} (1 - l^2)^2 + c[4l^2m^2 - (1 - l^2)(1 - m^2)] \\ - b(1 - l^2)(1 - m^2) + \dots = 0. \end{cases}$$

L'équation (5) est l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB; mais elle doit se décomposer, car elle représente l'enveloppe des droites qui joignent deux sommets quelconques, abstraction faite des diagonales. Les coniques (2) et (3) ont pour équations en coordonnées tangentielles

$$(6) \quad \alpha m^2 + \beta l^2 - \alpha\beta = 0,$$

$$(7) \quad \alpha' m^2 + \beta' l^2 - \alpha'\beta' = 0.$$

Donc l'équation (5) doit être identique, à un facteur  $k$  près, au produit de ces deux équations; on en déduit

$$\begin{aligned} a - d &= 0, \\ \alpha\alpha' &= Kbc, \quad \alpha'\beta + \alpha\beta' = K(3c - b), \\ \beta\beta' &= K, \quad \alpha + \alpha' = 2 - b - c, \\ \beta + \beta' &= \frac{2bc - c - b}{bc}, \quad Kbc = 1 - b - c + bc. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = \frac{1-\alpha'}{1-\beta'} = \frac{2-\alpha-\alpha'}{2-\beta-\beta'} = bc = A.$$

On trouve

$$\alpha' = \frac{KA}{\alpha}, \quad \beta' = \frac{K}{\beta},$$

$$(8) \quad \frac{A\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = 3c - b,$$

$$(9) \quad \alpha + \frac{KA}{\alpha} = 2 - c - b,$$

$$(10) \quad \beta + \frac{K}{\beta} = \frac{2bc - c - b}{bc}.$$

Posons  $\alpha = \lambda\beta$ ; l'équation (8) devient

$$(11) \quad \lambda^2 - \lambda(3c - b) + bc = 0.$$

Les équations (9) et (10) donnent, en tenant compte des relations établies entre  $b$ ,  $c$  et  $k$ , *une seule et même équation*

$$(12) \quad \lambda^2 + \lambda \frac{(b+c)(1+bc) - 4bc}{bc + 1 - b - c} + bc = 0.$$

Les relations (11) et (12) doivent être identiques; on en déduit la relation

$$(13) \quad 3c^2 - 4bc^2 + 6bc - 4c - b^2 = 0.$$

Les quantités  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont données par l'équation

$$\alpha + \frac{KA}{\alpha} = 2 - b - c$$

ou bien

$$\alpha^2 + \alpha(b + c - 2) + 1 - b - c + bc = 0,$$

et les quantités  $\beta$  et  $\beta'$  par l'équation

$$\beta^2 + \beta \frac{b+c-2bc}{bc} + \frac{1-b-c+bc}{bc} = 0.$$

On aura tous les cas particuliers en joignant à la relation (13) telle relation que l'on voudra entre les paramètres  $b$  et  $c$ .

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉOREME III. — *Si l'on considère une conique*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

*et trois droites*

$$y = tx, \quad y = t'x, \quad y = t''x,$$

*les paramètres  $t, t', t''$  satisfaisant à l'équation*

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + c\lambda = 0,$$

*$b$  et  $c$  étant liés par la relation*

$$3c^2 - 4bc^2 + 6bc - 4c - b^2 = 0,$$

1° *Ces trois droites sont les diagonales d'un hexagone, variable avec  $\lambda$ , inscrit dans la conique donnée et circonscrit à une seconde conique ;*

2° *Cet hexagone est circonscrit à une conique*

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - z^2 = 0,$$

*et les droites qui joignent ses sommets de deux en deux sont tangentes à une conique*

$$\alpha' x^2 + \beta' y^2 - z^2 = 0;$$

3° *Les quantités  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  satisfont aux deux équations*

$$x^2 + x(b + c - 2) + 1 - b - c + bc = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{b + c - 2bc}{bc} + \frac{1 - b - c + bc}{bc} = 0.$$

IV. Les considérations que nous venons de développer s'appliquent aux polygones inscrits et circonscrits à deux coniques, quel que soit le nombre de leurs côtés ;

mais les calculs deviennent de plus en plus compliqués à mesure que le nombre des côtés augmente. Laissant de côté le quadrilatère, dont les propriétés sont bien connues, nous allons nous occuper du pentagone inscrit et circonscrit à deux coniques.

Soit

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

l'équation de la conique à laquelle le pentagone est inscrit. Une droite ayant pour équation

$$px + qy - z = 0$$

rencontre cette courbe en deux points dont les paramètres  $t$  sont donnés par l'équation

$$2pt + q(1 - t^2) - 1 - t^2 = 0,$$

et, si l'on désigne par  $t$  et  $t'$  les deux racines de cette équation, on aura

$$S = t + t' = \frac{2p}{q+1}, \quad P = tt' = \frac{1-q}{1+q}.$$

Toute relation entre  $P$  et  $S$  donnera une relation entre  $p$  et  $q$ ; donc *cette relation entre  $P$  et  $S$  pourra être considérée comme l'équation de la courbe enveloppe de la droite considérée*. Un calcul bien simple montre que, dans ce système particulier de coordonnées, une conique ayant même triangle conjugué que la conique donnée sera représentée par une équation de la forme

$$S^2 = \alpha(P^2 + 1) + \beta P.$$

Cela posé, si l'on considère sur la conique donnée cinq points variables qui seront les sommets d'un pentagone inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe, il existera entre les cinq valeurs de  $t$



qui définissent ces points une équation de la forme

$$0 = t^5 + \lambda t^4 + (a_1 \lambda + b_1) t^3 + (a_2 \lambda + b_2) t^2 \\ + (a_3 \lambda + b_3) t + a_4 \lambda + b_4,$$

et, si l'on désigne par  $t$  et  $t'$  deux *quelconques* des racines de cette équation, on aura entre ces racines la relation

$$\frac{t^5 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4}{t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4} = \frac{t'^5 + b_1 t'^3 + \dots}{t'^4 + a_1 t'^3 + \dots}.$$

Cette relation, mise sous forme entière, et après suppression du facteur  $t - t'$ , donne une relation rationnelle par rapport à  $S$  et  $P$ . D'après les théorèmes de Poncelet, les côtés du pentagone et les droites qui joignent les sommets de deux en deux enveloppent deux coniques ayant un triangle conjugué commun avec la conique dans laquelle le polygone est inscrit. Donc l'équation en  $S$  et  $P$  que nous venons de trouver représente l'ensemble de ces deux coniques, et, par suite, doit se décomposer en deux facteurs de la forme

$$S^2 - \alpha(P^2 + 1) - \beta P.$$

On en conclut que les termes de degré impair en  $S$  dans cette relation doivent disparaître, ce qui exige

$$a_1 = b_2 = a_3 = b_4 = 0;$$

la relation devient alors

$$S^4 a_4 + S^2 [a_2 P^2 - (3a_4 + b_3) P + a_4 b_1] - P^4 \\ - (a_2 + b_1) P^3 + P^2 (a_4 + a_2 b_1 + b_3) \\ + P (-a_4 b_1 - a_2 b_3) + a_4 b_3 = 0.$$

Soit  $ABCDE$  un des pentagones considérés, et joignons tous ses sommets à l'un des sommets du triangle conjugué par des droites dont l'équation sera de la forme  $y = mx$ ; ces droites rencontreront la conique circonscrite au pentagone en cinq autres points  $A', B', C', D', E'$ .

qui seront les sommets d'un second pentagone inscrit et circonscrit aux trois mêmes coniques que le premier ; de plus, les paramètres  $t_1$  qui correspondent aux sommets de ce second pentagone seront liés aux paramètres  $t$  par la relation  $tt_1 = -1$ . Si donc, dans l'équation en  $t$ , on change  $t$  en  $\frac{-1}{t}$ , elle devra rester la même, *sauf le changement de  $\lambda$  en  $\lambda'$*  ; en faisant le calcul, on trouve facilement les relations

$$a_4 = \frac{1}{b_3}, \quad a_2 = \frac{b_1}{b_3}.$$

Dès lors, nous n'avons plus que deux paramètres  $b_1$  et  $b_3$ , entre lesquels existe une relation que nous allons déterminer.

Si, dans l'équation entre  $S$  et  $P$ , nous remplaçons  $S^2$  par  $\alpha(1 \pm P^2) + \beta P$ , elle devra, pour des valeurs convenables de  $\alpha$  et  $\beta$ , être identiquement satisfaite ; on obtient ainsi une équation du quatrième degré en  $P$ , qui doit être une identité, ce qui donne cinq équations de condition, qui, d'après notre raisonnement, devront se réduire à trois seulement : c'est ce qui arrive, en effet, car deux des équations trouvées se trouvent être les mêmes que deux autres et l'on a, pour déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  et pour trouver la relation entre  $b_1$  et  $b_3$ , les trois équations

$$\begin{aligned} \alpha^2 + b_1\alpha + b_3 &= 0, \\ \beta^2 - (3 + b_3^2)\beta + b_1^2 + (b_3 - 1)^2 &= 0, \\ 2\alpha\beta - (3 + b_3^2)\alpha + b_1\beta - b_1 - b_1b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on tire  $\alpha$  de la troisième, et qu'on porte cette valeur dans la première, on trouve une équation en  $\beta$  dans laquelle les coefficients de  $\beta^2$  et de  $\beta$  sont les mêmes que dans la deuxième équation et l'on a immédiatement

la relation cherchée entre  $b_1$  et  $b_3$ , qui est

$$[b_1^2 + (b_3 - 1)^2](4b_3 - b_1^2) - b_3(3 + b_3^2)^2 = 0.$$

L'équation qui lie les cinq valeurs de  $t$  correspondant aux sommets du pentagone est

$$t^5 + b_1 t^3 + b_3 t + \frac{\lambda}{b_3} (b_3 t^4 + b_1 t^2 + 1) = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Étant données trois coniques ayant pour équations*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 0, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\beta - 2\alpha} - \frac{1}{\beta + 2\alpha} &= 0, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\beta' - 2\alpha'} - \frac{1}{\beta' + 2\alpha'} &= 0, \end{aligned}$$

si l'on a, entre les cinq valeurs de  $t$  qui définissent cinq points de la première, la relation

$$t^5 + b_1 t^3 + b_3 t + \frac{\lambda}{b_3} (b_3 t^4 + b_1 t^2 + 1) = 0,$$

les cinq points considérés seront les sommets d'un pentagone, variable avec  $\lambda$ , inscrit dans la première conique, tandis que ses côtés et les droites qui joignent ses sommets de deux en deux seront tangents aux deux autres coniques; les valeurs  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  sont données par les équations

$$\begin{aligned} \alpha^2 + b_1 \alpha + b_3 &= 0, \\ \beta^2 - (3 + b_3^2) \beta + b_1^2 + (b_3 - 1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

et les coefficients  $b_1$  et  $b_3$  sont liés par la relation

$$[b_1^2 + (b_3 - 1)^2](4b_3 - b_1^2) - b_3(3 + b_3^2)^2 = 0.$$

La méthode que nous avons exposée peut être étudiée

d'une manière générale, en considérant  $m$  points pris sur une conique et cherchant à quelle équation du degré  $m$  en  $t$ , contenant un paramètre variable  $\lambda$ , doivent satisfaire les  $m$  valeurs qui définissent ces points pour qu'ils soient les sommets d'un polygone circonscrit à une deuxième conique; algébriquement, le problème est ramené à la recherche des conditions pour qu'un polynôme en  $S$  et  $P$  admette un facteur de la forme

$$S^2 - \alpha(P^2 + 1) - \beta P.$$

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1881).

### COMPOSITIONS D'ADMISSIBILITÉ.

#### *Composition sur un sujet de Licence.*

*Théorie.* — Montrer que l'étude du mouvement d'un corps solide qui peut tourner librement autour d'un point fixe, et qui est soumis à l'action de forces qui sont connues pour chaque position du corps solide, dépend de l'intégration de six équations différentielles du premier ordre. Établir ces équations.

*Application.* — Effectuer cette intégration dans le cas où deux des moments principaux d'inertie du corps relatif au point fixe sont égaux, et où aucune force extérieure n'agit sur lui.

#### *Composition sur les Mathématiques spéciales.*

On donne un ellipsoïde, et l'on considère les droites  $D$  telles que, si par chacune d'elles on mène des plans tan-



gents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact  $M, M'$  soient dans un même plan.

1° Démontrer que la droite  $D$  et la corde  $MM'$  sont rectangulaires.

2° Trouver le lieu des droites  $D$  qui passent par un point donné  $A$ .

3° Ce lieu est un cône du deuxième degré; trouver le lieu des positions du point  $A$  pour lesquelles le cône est de révolution.

4° Trouver l'enveloppe  $C$  des droites  $D$  qui sont contenues dans un plan donné  $P$ , et la surface  $S$  engendrée par la courbe  $C$  quand le plan  $P$  se déplace parallèlement à un plan donné  $Q$ .

5° Trouver pour quelles directions du plan  $Q$  la surface  $S$  est de révolution.

### *Composition sur les Mathématiques élémentaires.*

1° Résoudre un triangle connaissant le côté  $a$ , l'angle  $B$ , la différence  $b - h$  entre le côté  $b$  et la hauteur  $h$  issue du sommet  $A$ . — Discuter.

2° Montrer que le problème peut être ramené à la recherche des points où le côté  $BA$  rencontre une parabole ayant pour foyer le sommet  $C$  du triangle et pour directrice une parallèle au côté  $BC$ .

Discuter à nouveau le problème et comparer les résultats des deux discussions.

### COMPOSITIONS FINALES.

#### *Composition sur un sujet de Licence.*

Trouver, sur un hyperboloïde de révolution à une nappe donné, une courbe telle que le plan osculateur

en un quelconque de ses points  $M$  soit parallèle à la droite  $OM'$  qui joint le centre  $O$  de l'hyperboloïde au point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport au plan du cercle de gorge.

On formera l'équation différentielle de la projection sur ce plan de la courbe cherchée, et l'on étudiera les diverses formes que peut avoir cette projection.

### *Composition de Calcul.*

Évaluer l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3(x^2+x+1)^2}.$$

### *Composition sur la Géométrie descriptive.*

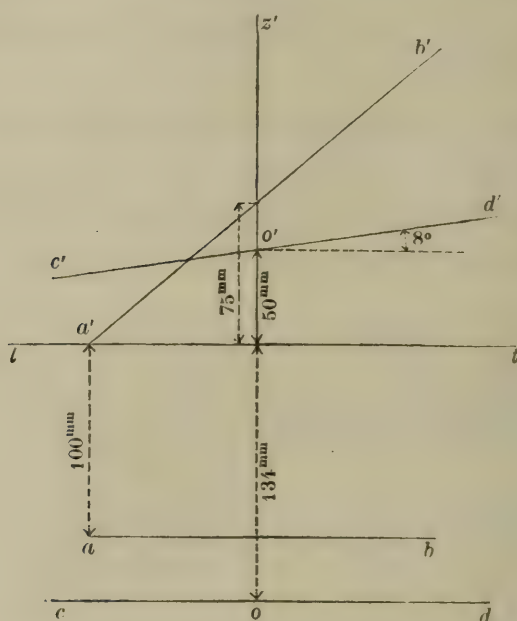
On donne un axe vertical  $(o, o'z')$  et un second axe  $(cd, c'd')$  parallèle au plan vertical et qui rencontre le premier; on donne en outre une droite de front  $(ab, a'b')$ .

La droite  $(ab, a'b')$ , en tournant autour de l'axe  $(o, o'z')$ , engendre un hyperboloïde  $H$ ; cette même droite, en tournant autour de l'axe  $(cd, c'd')$ , engendre un second hyperboloïde  $H'$ .

On demande de construire la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes et la tangente en un de ses points.

Pour distinguer les parties vues des parties cachées, on supposera que l'hyperboloïde  $H$  est enlevé, et que l'hyperboloïde  $H'$  est une surface non transparente.

*Données.* — Conformes au croquis ci-joint.



## LEÇONS SUR LES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

### 1. Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2. Figures symétriques par rapport à un axe, par rapport à un point, par rapport à un plan.

3. Maximum et minimum de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

4. Première leçon sur la mesure des volumes.

5.

6. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Fractions périodiques.

7. Volume de la sphère et du segment sphérique.

## 8. Résolution des équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

Discussion.

9. Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

10. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

11. Recherche du rapport de la circonférence du cercle au diamètre.

12. Angles trièdres. Trièdres supplémentaires. Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse construire un trièdre avec trois faces données ou avec trois dièdres donnés.

13. Racine carrée d'un nombre entier à une unité près.

14.

15. Étude géométrique de la parabole.

16.

17. Division des nombres entiers.

18. Division des polynômes.

19. Tangente à l'ellipse (Géométrie élémentaire).

20. Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide. Condition d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide libre, ou ayant un point fixe.

21. Rabattements. Changements de plan. Rotations.

22.

23. Distance d'un point à un plan, à une droite; plus courte distance de deux droites.

24. Nombres premiers (première leçon).

25. Équation bicarrée. Transformation des expressions de la forme  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$  en une somme algébrique de deux radicaux simples.



- 26. Figures homothétiques (Géométrie plane).
- 27.
- 28.
- 29.

#### LEÇONS SUR LES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

- 1.
- 2. Exposer quelques-unes des méthodes à l'aide desquelles on reconnaît la nature d'une surface du second ordre donnée par son équation.
- 3. Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes (première leçon).
- 4.
- 5. Application de la théorie des dérivées à l'étude des fonctions d'une seule variable. — Exemples.
- 6.
- 7.  $\lim \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m$ , quand  $m$  devient infini.
- 8. Théorème de Rolle. Son usage pour la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.
- 9. Approximation des racines d'une équation. (Méthode de Newton.)
- 10. Génératrices rectilignes du parabolôide hyperbolique (Géométrie analytique).
- 11. Plans diamétraux dans les surfaces du second degré.
- 12. Intersection de deux courbes du second degré (on ramènera la question à la résolution d'une équation du troisième degré et l'on discutera le problème).
- 13. Transformation des équations algébriques. — Exemples.
- 14. Première leçon sur les séries.
- 15.

16.

17.

18. Règle des signes de Descartes.

19. Étant donnée l'équation générale d'une ellipse, trouver les axes en grandeur et en position. Étant donnée l'équation d'une parabole, trouver l'équation de son axe et la grandeur de son paramètre.

20. Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe.

21. Section plane de l'hyperboloïde de révolution à une nappe (cas où la section est une hyperbole).

22. Étude algébrique de l'équation en  $S$ .

23. Limites des racines d'une équation algébrique.

24. Condition nécessaire et suffisante pour que deux équations algébriques à une seule inconnue aient au moins une racine commune.

25. Recherche de l'équation d'une surface d'après son mode de génération.

26.

27. Mener d'un point donné une normale à l'ellipse.

28. Connaissant  $\cos a$ , calculer  $\cos \frac{a}{m}$ . Connaissant  $\sin a$ , calculer  $\sin \frac{a}{m}$ .

29. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré. Discussion.

---

---

### QUESTIONS PROPOSÉES POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DANOISE.

---

1872. Construire un trapèze, connaissant les diagonales, l'angle qu'elles font entre elles et l'angle formé par les côtés non parallèles.

1873. Construire un triangle  $ABC$ , le côté  $BC$  devant être tangent à un cercle donné, le côté  $CA$  devant être tangent à un autre cercle en  $A$ , pendant que le troisième côté  $AB$ , prolongé s'il est nécessaire, passe par un des deux centres de similitude des deux cercles, et l'angle  $C$  étant égal à  $60^\circ$ . Combien y a-t-il de solutions?

1874. Incrire à un secteur de cercle  $ABC$  un secteur  $abc$  semblable au premier, de telle manière que le centre  $c$  se trouve en un point donné de l'arc de cercle  $AB$ .

1875. Construire un quadrilatère  $ABCD$ , connaissant les deux distances des milieux des côtés opposés, l'angle formé par les deux droites joignant ces milieux et deux angles du quadrilatère, ces deux angles pouvant être soit deux angles consécutifs, soit deux angles opposés.

1876. Un cercle et deux droites étant donnés dans un plan, construire une droite, de direction donnée, rencontrant le cercle en deux points  $A, B$ , et les droites en deux points  $a, b$ , tels que les distances  $Aa, Bb$  soient égales en grandeur.

Comment résout-on la question si l'on remplace le cercle donné par une ellipse?

1877. Construire un trapèze, connaissant les deux diagonales, la distance de leurs milieux et la hauteur.

1878. 1° Construire un triangle dont les côtés sont parallèles à des droites données et dont les sommets se trouvent sur des droites données.

2° Mener une droite parallèle à une droite donnée de telle manière qu'elle divise dans le même rapport deux côtés opposés d'un quadrilatère plan. Montrer que la même question n'est résoluble pour un quadrilatère gauche que dans le cas où la droite donnée se trouve dans un plan parallèle aux côtés qu'on ne divise pas.

1879. 1<sup>o</sup> Construire un triangle dont on connaît un angle, le côté opposé et le rapport des deux autres côtés.

2<sup>o</sup> Construire un quadrilatère ABCD circonscriptible à un cercle, connaissant la différence des angles opposés B et D, la différence des côtés AB et AD et les rapports  $\frac{OB}{OD}$  et  $\frac{OA}{OC}$  des distances du centre du cercle inscrit aux sommets opposés.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*).

## COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880.

SESSION DE JUILLET.

### Marseille.

*Composition d'Analyse.* — La tangente MT menée d'un point quelconque M d'une surface à une sphère donnée de rayon  $a$  est dans un rapport constant  $\frac{1}{\lambda}$  avec la moyenne proportionnelle entre la distance OP du centre O de cette sphère au plan tangent à la surface au point M et la longueur MN de la normale en ce point à la surface, cette normale étant terminée par sa trace N sur un plan diamétral fixe de la sphère. On demande :

- 1<sup>o</sup> De trouver l'équation générale de la surface ;
- 2<sup>o</sup> De trouver l'équation de la surface : 1<sup>o</sup> lorsque le rayon  $a$  de la sphère est nul ; 2<sup>o</sup> lorsque le rapport  $\frac{1}{\lambda}$  est égal à l'unité ;
- 3<sup>o</sup> De discuter ces divers résultats.



*Composition de Mécanique.* — Deux points  $M, M'$  mobiles dans un plan sans frottement sont reliés par un fil flexible, inextensible et sans masse qui passe sans frottement dans un anneau très petit situé dans le plan. Le point  $M'$  étant astreint à décrire une droite  $AB$  du plan et le fil étant tendu, la vitesse initiale du point  $M$  étant perpendiculaire au rayon  $OM$ , on demande d'étudier le mouvement du système dans le cas général et dans celui où la droite  $AB$  passe par le point  $O$ .

Il n'y a pas de forces appliquées.

- *Épreuve pratique.* — Étant données la latitude géographique  $\varphi$  d'un lieu, l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$  d'un astre, calculer l'azimut et la distance zénithale de cet astre au temps sidéral  $t$ .

#### Besançon.

*Composition d'Analyse.* — Déterminer une courbe telle que, menant par un point quelconque la tangente  $MT$  et la normale  $MN$ , les diagonales du quadrilatère formé par ces deux droites et les deux axes  $Ox$  et  $Oy$  fassent un angle donné  $\theta$ .

*Composition de Mécanique.* — Déterminer la figure d'équilibre d'un fil fixé en deux de ses points et attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

*Épreuve pratique.* — On donne la distance zénithale d'un astre, sa distance polaire et la latitude du lieu. Calculer l'angle horaire du plan méridien qui contient l'astre.

#### Bordeaux.

*Composition d'Analyse.* — On a deux plans dont l'un se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse

constante, tandis que l'autre tourne aussi avec une vitesse constante autour d'une droite fixe  $A$  perpendiculaire à la direction du premier. La droite d'intersection rencontre dans chacune de ses positions une surface de révolution ayant pour axe l'axe de rotation du second plan.

Étudier la courbe tracée par ces rencontres sur la surface de révolution. On considérera plus spécialement le cas où la surface de révolution est un cône. Calculer alors les angles de contingence et de torsion de la courbe.

Examiner, si le temps le permet, le cas d'une sphère.

*Composition de Mécanique.* — Première question (lemme). — Une figure plane  $A$ , située dans le plan  $xy$ , tourne avec ce plan autour de l'axe des  $y$ ; la vitesse angulaire  $\omega$  est constante. On demande les expressions simplifiées de la résultante  $R$  des forces centrifuges nées du mouvement et du couple  $G$ , qu'on obtiendrait en transportant cette résultante parallèlement à elle-même au centre de gravité de la figure.

Seconde question (application). — Une tige pesante homogène a ses extrémités  $A$  et  $B$  obligées de rester l'une sur la verticale  $Oy$ , l'autre sur l'horizontale  $Ox$ ; le plan  $xy$  tourne avec la vitesse constante  $\omega$  autour de  $Oy$ . On néglige le frottement. On demande :

1° La position d'équilibre de la tige  $AB$  pour une vitesse angulaire donnée  $\omega$  (détermination de l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec l'horizontale);

2° Les pressions exercées par la tige sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ;

3° Les équations différentielles du mouvement dans le cas général;

4° La détermination complète du mouvement lorsque la tige est très légèrement écartée de sa position d'équilibre.

*Épreuve pratique.* — Calculer de  $2^m$  en  $2^m$ , et pour des angles horaires variant de  $4^h$  à  $4^h 10^m$ , la hauteur au-dessus de l'horizon d'une étoile dont la déclinaison est  $1^{\circ} 21' 14'', 32$ . La latitude est de  $44^{\circ} 50' 19'', 0$ . On vérifiera l'exactitude des calculs par la méthode des différences.

#### Grenoble.

*Composition de Mécanique.* — Étudier le mouvement d'un point matériel dans un plan, en supposant qu'il soit attiré par un point fixe de ce plan, en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

Indiquer les différentes formes de la trajectoire au moyen de son équation différentielle. Dans quel cas peut-on effectuer complètement l'intégration?

*Épreuve pratique.* — Déterminer l'azimut du centre du Soleil à  $3^h 10^m$  de l'après-midi (temps moyen) avec les données suivantes :

Latitude du lieu .....	$45^{\circ} 11' 12''$
Déclinaison australe du Soleil .....	$17^{\circ} 8' 53''$
Équation du temps .....	$13^m 48^s$ .

( *A suivre.* )

#### PUBLICATIONS RÉCENTES.

LEZIONI SULLA TEORIA DEI NUMERI di *P.-G. Lejeune-Dirichlet*, pubblicate e corredate di appendici da *R. Dedekind*, tradotte dalla terza edizione da Aureliano Faifofer. In-8. — Venezia, tipografia Emiliana; 1881.

INVESTIGACIONES FILOSOFICO-MATEMATICAS SOBRE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS, por *Apolinar Fola Igurbide*. Primera seccion. Grand in-8. Prix : 5<sup>fr</sup>, 50. — Valencia, imprenta de Manuel Alufre; 1881.

OEUVRES COMPLÈTES DE LAGRANGE, publiées par les soins de M. *J.-A. Serret*, membre de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Tomes VIII et IX. In-4. Prix : 18<sup>fr</sup> chacun. — Paris, Gauthier-Villars; 1879-1881.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, conformes aux derniers programmes officiels, renfermant un grand nombre d'exercices, et suivis d'un Complément à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales, et de notions sur le lever des plans et le nivellement; par MM. *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*. 3<sup>e</sup> édition, entièrement refondue. In-8. Prix : 6<sup>fr</sup>. Paris, Gauthier-Villars; 1881.

COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL, par M. *J. Hoüel*. Tome IV. Grand in-8. Prix : 10<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE, comprenant les Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École nationale des Mines, par M. *H. Resal*, membre de l'Institut. Tomes V et VI, comprenant la Résistance des matériaux, les Constructions en bois, les Maçonneries, les Fondations, les Murs de soutènement, les Réservoirs, les Voûtes, les Ponts et Charpentes, les Constructions métalliques, la Navigation intérieure et les Travaux maritimes. In-8. Prix : 12<sup>fr</sup>, 50 et 15<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1880-1881.

COURS DE MÉCANIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, par *Ch. Sturm*, revu et corrigé par M. *Prouhet*. 4<sup>e</sup> édition, suivie de Notes et Énoncés de problèmes, par M. *de Saint-Germain*, professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte. Prix : 14<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.



COURS D'ASTRONOMIE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, par M. *H. Faye*, membre de l'Institut. 1<sup>re</sup> Partie : Astronomie sphérique, Description des instruments, Théorie des erreurs, Géodésie et Géographie mathématiques. Grand in-8, avec figures dans le texte. Prix : 12<sup>fr</sup>,50. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

L'ASTRONOMIE PRATIQUE ET LES OBSERVATOIRES EN EUROPE ET EN AMÉRIQUE, depuis le milieu du xvii<sup>e</sup> siècle jusqu'à nos jours; par MM. *C. André* et *A. Angot*. IV<sup>e</sup> Partie, Observatoires de l'Amérique du Sud et établissements météorologiques des États-Unis. In-18 jésus, avec figures dans le texte. Prix : 3<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

NOTES SUR LES PROGRÈS RÉCENTS DE LA PHYSIQUE, Appendice au petit Traité de Physique de M. Jamin, par M. *E. Bouty*, professeur au lycée Saint-Louis. In-8. Prix : 1<sup>fr</sup>,50. — Paris, Gauthier-Villars; 1882.

NOUVEAUX ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE, par M. *G. Mathet*, professeur au lycée de Lyon. In-8. — Paris, Hachette; 1881.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE, rédigées conformément aux programmes du 2 août 1880, pour les classes de huitième et de septième, par M. *A. Ducatel*, professeur au lycée Fontanes. In-8, avec 19 figures dans le texte. — Paris, G. Masson; 1882.

LE PROJEZIONI DELLE CARTE GEOGRAFICHE, per *Matteo Fiorini*, ingegnere e professore di geodesia nella Università di Bologna. In-8. — Bologna, N. Zanichelli; 1881.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, avec de nombreux exercices, par F. L. C. In-18. — Paris, Poussielgue frères; 1882.

## TIRAGES A PART.

*L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie*; par PAUL TANNERY. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV, 2<sup>e</sup> série, 2<sup>e</sup> cahier.

*Sur la mesure du cercle d'Archimède*; par PAUL TANNERY. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV, 2<sup>e</sup> série, 3<sup>e</sup> cahier.

*Sur les séries récurrentes dans leurs rapports avec les équations*; par C.-A. LAISANT. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. V; 1881.

*Le calcul des opérations chimiques, soit une méthode pour la recherche, par le moyen de symboles, des lois de la distribution du poids dans les transformations chimiques*; par B.-C. BRODIE. Compte rendu, par A. LAISANT. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. V; 1881.

*Sur les aires des courbes anallagmatiques*; par V. LIGUINE. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. V; 1881.

*Sopra alcuni invarianti di due forme binarie degli ordini 5 e 2 o 5 e 3, e in particolare sul risultante di esse*, per ENRICO D'OVIDIO. Extrait des *Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL)*, tome IV; 1881.

*Intégration, sous forme finie, des formules de Fresnel relatives à l'intensité et à l'anomalie, dans sa Théorie de la diffraction de la lumière*; par ESCARY. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des Sciences*; 1880.

*Ueber einige akustische Bewegungserscheinungen*,

*insbesondere über das Schallradiometer*, von Dr V. DVORAK. Extrait des *Sitzungsb. der k. Akad. der Wissensch.*, t. LXXXIV, II<sup>e</sup> Partie; 1881.

*On certain tetrahedra specially related to four spheres meeting in a point*, by SAMUEL ROBERTS. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. XII, n<sup>o</sup> 173.

*Historical Note on Dr Grave's Theorem on confocal conics*, by SAMUEL ROBERTS. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. XII, n<sup>o</sup> 173.

*Quaternion proof of M. Samuel Roberts' theorem of four co-intersecting spheres*, by J. J. WALKER. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. XII, n<sup>o</sup> 174.

*On an immediate generalization of local theorems in which the generating point divides a variable linear segment in a constant ratio*, by SAMUEL ROBERTS. Extrait de *the American Journal of Mathematics*, vol. III.

*Applications mécaniques du Calcul des quaternions*; par GENTY. Extrait du *Journal de Resal*, t. VII; 1881.

*Galilée, Torricelli, Cavalieri, Castelli. Documents nouveaux tirés des Bibliothèques de Paris*; par CHARLES HENRY. Extrait des *Memorie della reale Accademia dei Lincei*, serie 3<sup>a</sup>, vol. V<sup>o</sup>; 1880.

*Supplément aux recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat*, par CH. HENRY. Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. XIII; 1880.

*Sur la possibilité de l'équilibre électrique*; par L. LÉVY. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; 1881.

---



---

**BIBLIOGRAPHIE.**

---

**TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE**, à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et aux grades universitaires; par M. H. Picquet, capitaine du Génie, Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, Secrétaire de la Société mathématique de France. — Première partie : Géométrie analytique à deux dimensions, 1 volume grand in-8, avec 130 figures dans le texte. Prix : 15<sup>fr</sup>.

**PRÉFACE DE L'AUTEUR.**

Le *Traité de Géométrie analytique* que nous publions aujourd'hui est fait pour les élèves et pour tous ceux qui s'intéressent à cette science. Nous pensons que chacun, fort ou faible, saura y puiser dans la mesure de ses besoins, et eu égard au but qu'il poursuit. Il n'est le reflet d'aucun de ses pareils; mais, à quelques résultats près, dont plusieurs ont été indiqués par nous dans des travaux antérieurs, et sous la réserve de ce qui va suivre, il ne renferme rien qui n'ait été dit dans un livre classique. Il a son caractère propre, provenant de ce que nous avons surtout cherché à vulgariser l'emploi de ces méthodes, si connues et si appréciées aujourd'hui par le public savant et par le corps enseignant, mais que les élèves ignorent en général : nous avons nommé la dualité et l'homographie. En consacrant, dès le début, quelques leçons à leur présenter franchement ces deux puissantes méthodes de transformation, quel large horizon n'ouvre-t-on pas à ceux qui apprennent, et combien d'efforts pénibles et stériles sont évités lors du développement ultérieur de l'esprit géométrique? Aussi trouvera-t-on, dès le premier Livre, un chapitre consacré à l'étude spéciale de chacune de ces méthodes, à la suite immédiate de celle de la ligne droite et du point.

Dans le second Livre, nous abordons la théorie générale des courbes planes, croyant qu'elle doit être placée avant la théorie particulière des coniques, afin d'éviter de nombreuses répétitions. L'asymptote y reçoit sa véritable définition, qui est celle de la Géométrie descriptive, et d'où l'on déduit si simple-



ment son équation et ses propriétés. Nous y insistons particulièrement sur la recherche des points singuliers, dont le nombre et l'espèce modifient si profondément la nature de la courbe.

Le troisième Livre traite exclusivement des courbes du second degré. Un chapitre est consacré à l'étude du cercle, dont une suite nécessaire est la théorie de l'involution, si utile par ses applications de toute espèce. Les élèves rencontreront peut-être quelques difficultés provenant de la notation adoptée pour l'équation de la conique générale. Qu'il nous soit permis à ce sujet de signaler les inconvénients résultant de la notation habituelle, qui ne s'adapte pas à la géométrie de l'espace dans laquelle les élèves ne reconnaissent plus, lors de l'étude des surfaces du second degré, certaines fonctions des coefficients de l'équation générale d'une conique, qui se présentent constamment en Géométrie à deux dimensions. Pour éviter cet inconvénient, il est nécessaire que l'ensemble des termes en  $\bar{x}$ ,  $y$ ,  $z$ , dans l'équation des surfaces du second degré, reproduise identiquement l'équation rendue homogène des coniques : c'est ce qui n'arrive pas avec la notation habituelle, tandis que les notations anglaise et allemande s'y prêtent tout à fait. La seconde, dans laquelle les coefficients sont tous les mêmes et ne diffèrent que par les indices, est incontestablement supérieure; mais l'habitude en est longue, l'emploi sujet à des erreurs; et nous avons jugé la première préférable pour les élèves. Qu'il nous suffise d'ajouter que, dans l'étude des coniques, nous avons regardé la théorie du centre, des diamètres et des axes, comme un cas particulier de celle des pôles et polaires; et que nous avons insisté, à propos de la détermination de ces courbes, sur la relation linéaire la plus générale entre les coefficients, d'où dérive la notion des systèmes linéaires,

Enfin, dans le quatrième Livre, nous donnons, à propos de la construction des courbes, quelques notions sur les courbes du troisième ou du quatrième degré; et un second Chapitre traite des coordonnées polaires et de leurs applications.

Tel est, dans son ensemble, l'ouvrage que nous présentons au public : nous désirons surtout l'approbation des personnes compétentes, et leurs observations seront toujours accueillies avec intérêt.

Un second Volume sera consacré à la Géométrie analytique à trois dimensions.

H. P.

## SUR L'INTERSECTION DE L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION ET D'UNE DROITE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

La distance d'un point quelconque d'un hyperboloïde de révolution au plan P du cercle de gorge est proportionnelle à la longueur de la tangente menée à ce cercle par la projection du point sur le plan P; le rapport de la première ligne à la seconde est, en effet, égal à la cotangente de l'inclinaison des génératrices sur l'axe.

*Si donc deux hyperboloïdes H et H<sub>1</sub> ont leurs cercles de gorge S = 0, S<sub>1</sub> = 0 dans un même plan P, la projection de leur intersection sur tout plan parallèle à P sera le lieu d'un point tel, que les tangentes menées de ce point aux cercles S et S<sub>1</sub> aient un rapport constant K, c'est-à-dire un cercle S — K<sup>2</sup> S<sub>1</sub> = 0.*

Cela posé, soit H un hyperboloïde de révolution à axe vertical, (d, d') une droite quelconque, (e, e') le point où cette droite perce le plan P du cercle de gorge; prenons arbitrairement dans le plan horizontal un point ω sur la perpendiculaire ff<sub>1</sub> menée par e à la droite d, et désignons par H<sub>1</sub> l'hyperboloïde engendré par la rotation de (d, d') autour de la verticale du point ω. Le cercle de gorge de cet hyperboloïde auxiliaire sera dans le plan P; l'intersection des deux hyperboloïdes H et H<sub>1</sub> se projettera donc horizontalement suivant un cercle c, et les points de rencontre de ce cercle et de d seront les projections horizontales des points communs à la droite (d, d') et à l'hyperboloïde proposé H.

La méthode de Duleau (*Correspondance sur l'École*

*Polytechnique*, t. I, p. 438), aussi bien que la méthode du paraboloïde à trois directrices de front (que j'ai donnée le premier, je crois, dans mes cours, il y a plus de douze ans), sont fondées l'une et l'autre sur l'emploi d'un point déterminé, ce qui est un défaut, ce point pouvant se trouver soit trop rapproché, soit hors des limites de l'épure. La méthode précédente, d'ailleurs si simple en théorie, offre au contraire l'avantage, inhérent à toute bonne solution graphique, de laisser à l'opérateur une certaine latitude. Le point  $\omega$  n'étant, en effet, astreint qu'à se trouver sur une droite déterminée  $ff_1$ , peut toujours être choisi de façon que le cercle de gorge de l'hyperboloïde auxiliaire coupe bien le cercle de gorge de l'hyperboloïde primitif. Les points communs à ces deux cercles appartiendront au cercle  $c$ , dont on déterminera ensuite deux nouveaux points, en coupant les deux hyperboloïdes par un plan horizontal convenablement choisi. (Il vaut mieux procéder de la sorte que de déterminer directement le centre du cercle  $c$ , en se fondant sur ce que le rapport de ses distances aux centres des cercles de gorge est égal à  $K^2$ .)

Si l'on tenait, malgré tout, à particulariser, on pourrait prendre  $\omega$  sur la parallèle menée par la trace horizontale de  $(d, d')$  à la droite que déterminent le pied de l'axe de l'hyperboloïde  $H$  et la trace horizontale de l'une des génératrices dont la projection est parallèle à  $d$ . La quantité  $K$ , qui est égale au rapport des projections des portions de génératrices comprises entre le plan horizontal et le plan des cercles de gorge, serait alors égale au rapport des rayons  $R$  et  $R_1$  de ces cercles, et la circonférence  $c$  deviendrait la circonférence  $R_1^2 S - R^2 S_1 = 0$ , dont un diamètre a pour extrémités les centres de similitude des deux cercles de gorge.

---



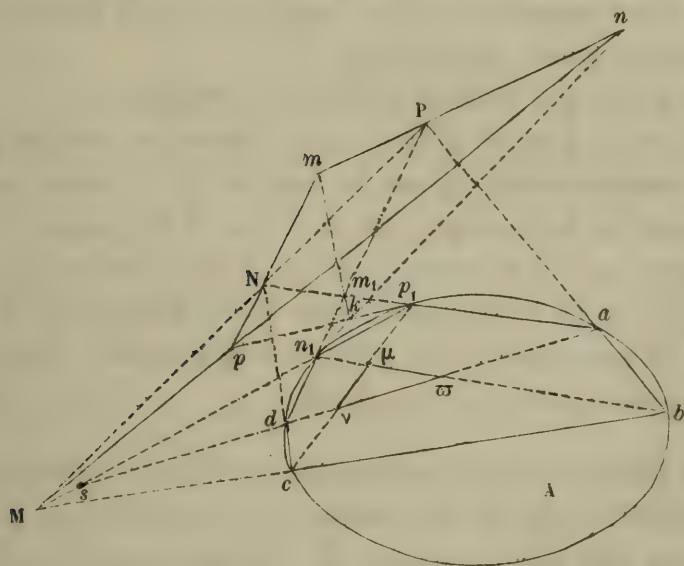
# THÉORÈME DE L'HEXAGONE INSCRIT DANS UNE CONIQUE,

PAR M. HENRI DUFAU,  
Élève du lycée de Bordeaux.

Nous allons déduire de la propriété fondamentale de la polaire le théorème de Pascal, et cela par un raisonnement géométrique élémentaire.

Considérons l'hexagone  $abcdn_1p_1$  (fig. 1) inscrit

Fig. 1.



dans la conique A ; M, N, P sont les points de rencontre des côtés opposés.

Joignons deux à deux les sommets opposés de l'hexagone ; nous formons ainsi un triangle  $\mu\nu\varpi$ . Prenons successivement :

Le pôle  $m$  de  $\nu\varpi$  par rapport à la conique,

Le pôle  $n$  de  $\varpi\mu$  »

Le pôle  $p$  de  $\mu\nu$  »



Il est facile de voir que les points  $M, N, P$  seront respectivement sur les côtés du triangle  $mnp$  : par exemple,  $P$  sera sur  $mn$  polaire de  $\varpi$ ; car,  $n_1 b$  et  $ad$  se coupant en  $\varpi$ ,  $ab$  et  $n_1 d$  se couperont sur la polaire de  $\varpi$ .

Cela posé, considérons les deux triangles  $mnp$  et  $m_1 n_1 p_1$  :

$mn$  coupe  $m_1 n_1$  en  $P$ ,

$np$  »  $n_1 p_1$  »  $M$ ,

$pm$  »  $p_1 m_1$  »  $N$ .

Or, d'après un théorème connu, pour que  $M, N, P$  soient en ligne droite, il faut et il suffit que leurs sommets correspondants soient situés sur trois droites concourantes  $kmm_1, knn_1, kpp_1$ .

Or je dis que cette condition est remplie.

En effet,  $n$  est le pôle de  $\varpi n_1$  : donc  $nn_1$  est tangente à la conique en  $n_1$ ;  $p$  est le pôle de  $p_1 \nu$  : donc  $pp_1$  est tangente à la conique en  $p_1$ ; ces deux tangentes se coupent en  $k$ . En outre,  $p_1 n_1$  et  $ad$  se coupent en  $S$ .

$k, m_1$  et  $m$  se trouvent alors sur la polaire de  $S$ , d'après la propriété de la polaire déjà signalée : donc ces trois points sont en ligne droite. C. Q. F. D.

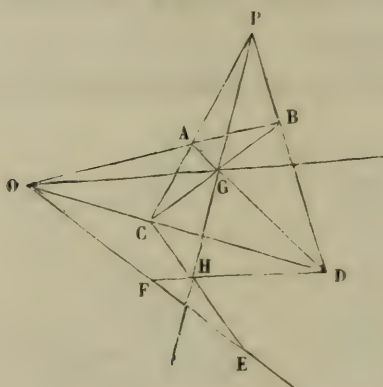
La démonstration corrélatrice conduirait au théorème corrélatif, celui de Brianchon; elle ne diffère de la précédente que par l'échange de l'élément point en l'élément droite, et réciproquement. Tout revient alors à démontrer que deux triangles ont leurs sommets alignés sur un même point, ou, ce qui revient au même, que les points de rencontre des côtés opposés sont sur une même droite, que l'on constate être la polaire d'un certain point par rapport à la conique.

Nous allons montrer maintenant que, réciproquement, du théorème de Pascal on peut déduire la propriété fondamentale de la polaire.



en O ; PG sera la polaire de O par rapport à la conique cherchée ; il nous est alors facile de construire un

Fig. 3.



sixième point F de cette conique. Cela fait, si nous considérons la polaire OG de P, nous pourrions avoir deux nouveaux points d'intersection, et ainsi de suite en doublant, pourvu que l'on ne prenne pas deux fois la même polaire.

## SUR DEUX PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX FOYERS ET AUX CERCLES FOCaux DANS LES CONIQUES ;

PAR M. X. ANATOMARI,

Professeur au lycée de Carcassonne.

*Première propriété.* — On sait que l'on peut définir un foyer d'une courbe du second degré le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la courbe ; de sorte que, si l'on désigne par  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées d'un foyer, et par  $mx + ny + h = 0$  l'équation de la directrice correspondante, l'équation de la courbe sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + h)^2.$$

Le premier membre de cette équation peut être considéré comme le carré de la distance normale du point  $(x, y)$  au cercle de rayon nul  $(\alpha, \beta)$ , et l'on peut considérer une conique comme le lieu des points dont le rapport des distances à un cercle de rayon nul et à une droite fixe est constant.

Cette définition peut être généralisée, et l'on peut dire qu'une conique est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances étant comptées normalement.

Cherchons, en effet, ce lieu géométrique.

Pour cela, rapportons la courbe à deux diamètres rectangulaires du cercle, l'un de ces diamètres étant perpendiculaire à la droite fixe. Si  $x - \alpha = 0$  est l'équation de la droite fixe,  $K$  la valeur du rapport constant et  $R$  le rayon du cercle, l'équation du lieu sera, en prenant pour distance au cercle la distance minimum,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{x - \alpha} = K,$$

ou, en la rendant rationnelle,

$$(2) \quad x^2 + y^2 = [K(x - \alpha) + R]^2,$$

équation d'une courbe du second degré ayant pour foyer l'origine, et pour directrice une parallèle à la droite fixe.

Si l'on retranche  $R^2$  des deux membres de l'équation (2), elle devient

$$(3) \quad x^2 + y^2 - R^2 = K(x - \alpha)[K(x - \alpha) + 2R].$$

Sous cette forme, l'équation montre que la courbe passe par les points communs au cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$



et aux deux droites

$$x - \alpha = 0, \quad K(x - \alpha) + 2R = 0.$$

Il est clair, d'après cela, que la droite représentée par l'équation

$$K(x - \alpha) + 2R = 0$$

doit jouer un rôle analogue à celui de la droite

$$K(x - \alpha) = 0.$$

Et, en effet, si l'on prend pour distance au cercle la distance maximum, et pour droite fixe la droite

$$K(x - \alpha) + 2R = 0,$$

le rapport restant le même, l'équation du lieu est

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + R}{\frac{1}{K} [K(x - \alpha) + 2R]} = K,$$

ou bien

$$\sqrt{x^2 + y^2} = K(x - \alpha) + R,$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 = [K(x - \alpha) + R]^2,$$

équation identique à l'équation (2). Il est d'ailleurs évident que cette équation peut représenter l'une quelconque des courbes du second degré.

Ainsi :

**THÉOREME.** — *Une conique peut être considérée comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances étant comptées sous un angle droit. Le centre du cercle est un foyer de la conique, et la droite fixe perpendiculaire à l'axe focal passe par les points communs à la courbe et au cercle.*

*Remarque.* — Il y a deux cordes communes à la conique et au cercle, perpendiculaires à l'axe focal. Chacune d'elles donnera un mode de génération de la conique. Seulement, si l'on prend la corde la plus rapprochée du foyer, il faudra prendre, pour distances au cercle, les distances minima ; pour l'autre, les distances maxima.

D'après cela, on pourrait définir un foyer : le centre d'un cercle de rayon absolument quelconque, mais tel que le rapport des distances normales d'un point quelconque de la courbe à ce cercle et à une droite fixe convenablement choisie soit constant.

Nous venons de voir qu'à un cercle donné correspondent deux droites

$$\begin{aligned} Kx - Kx &= 0, \\ Kx + 2R - Kx &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de la directrice étant

$$Kx + R - Kx = 0,$$

on voit qu'elle est également éloignée des deux droites précédentes.

Il résulte de là qu'il existe dans le plan d'une conique une infinité de systèmes formés d'un cercle et de deux droites, et tels que le rapport des distances normales maxima ou minima d'un point quelconque de la courbe à ce cercle et à l'une ou l'autre de ces droites soit constant. Tous ces cercles ont pour centre commun un foyer ; les droites correspondantes sont les sécantes communes perpendiculaires à l'axe focal.

*Deuxième propriété.* — Cette deuxième propriété est relative aux cercles focaux. On sait que l'on appelle ainsi les cercles doublement tangents à une courbe du second degré.

Rapportons la courbe à deux diamètres rectangulaires d'un cercle focal, l'un de ces diamètres étant perpendiculaire à la corde de contact. Soit

$$x - \alpha = 0$$

l'équation de cette corde. L'équation de la courbe pourra être mise sous la forme

$$(4) \quad x^2 + y^2 - R^2 = K^2(x - \alpha)^2,$$

$R$  désignant le rayon du cercle focal. Par un point quelconque de la courbe, menons la tangente  $MP$  au cercle focal, et la perpendiculaire  $MQ$  à la corde de contact.

L'équation (4) exprime que le rapport  $\frac{MP}{MQ}$  est constant.

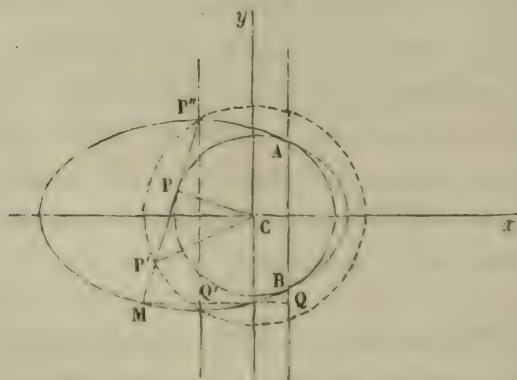
Imaginons un cercle de rayon  $R'$  concentrique au cercle focal considéré. Son équation sera

$$(5) \quad x^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

Si l'on retranche membre à membre les équations (4) et (5), on obtient

$$K^2(x - \alpha)^2 = R'^2 - R^2, \quad R' > R,$$

équation qui représente un système de deux droites, les



sécantes communes à la conique (4) et au cercle (5) perpendiculaires à l'axe des  $x$ .

Considérons l'une de ces sécantes, celle qui a pour équation

$$K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2} = 0.$$

La distance du point M à cette sécante est

$$MQ' = \frac{K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}}{K}.$$

D'autre part, si l'on désigne par P' l'un des points de rencontre de MP avec le cercle de rayon R', on a

$$MP' = MP - PP'.$$

Or

$$PP' = \sqrt{R'^2 - R^2};$$

donc

$$MP' = MP - \sqrt{R'^2 - R^2}.$$

D'ailleurs

$$MP = K(x - \alpha),$$

et, par suite,

$$MP' = K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}.$$

On en déduit

$$\frac{MP'}{MQ'} = \frac{K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}}{\frac{1}{K} [K(x - \alpha) - \sqrt{R'^2 - R^2}]} = K.$$

Remarquons, d'ailleurs, que l'angle PP'C est constant, puisque la circonférence R' est concentrique à la circonférence R ; il en est de même de l'angle supplémentaire MP'C.

Ainsi :

**THÉORÈME.** — *Toute courbe du second degré peut être considérée comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances au cercle fixe étant comptées sous un angle constant.*



*Remarque.* — On serait évidemment arrivé au même résultat si l'on avait pris la deuxième sécante commune perpendiculaire à l'axe focal, avec la distance  $MP''$ .  
Donc :

Étant donné un cercle focal d'une conique, il existe dans le plan de cette courbe une infinité de systèmes composés d'un cercle et de deux droites, et tels que le rapport des distances maxima ou minima sous un *angle constant*, d'un point quelconque de la courbe à ce cercle et à l'une ou l'autre de ces droites, soit constant. Tous ces cercles sont concentriques avec le cercle focal considéré, et les droites correspondantes sont les sécantes communes à ces cercles et à la conique, perpendiculaires à l'axe focal.

Cette propriété est analogue à celle que nous avons donnée plus haut relativement aux cercles ayant pour centre un foyer ; elle complète l'analogie des foyers et des cercles focaux.

On voit, en outre, en rapprochant les deux propriétés, que l'on peut donner, pour les coniques, le mode général de génération suivant :

Une conique peut être considérée, d'une infinité de manières, comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances au cercle fixe étant comptées sous un angle constant.

Si l'angle constant est droit, tous ces cercles ont pour centre commun un foyer.

Si l'angle est nul ou égal à  $180^\circ$ , les cercles sont des cercles focaux doublement tangents.

Pour toute autre valeur de l'angle, les cercles sont concentriques avec un cercle focal.

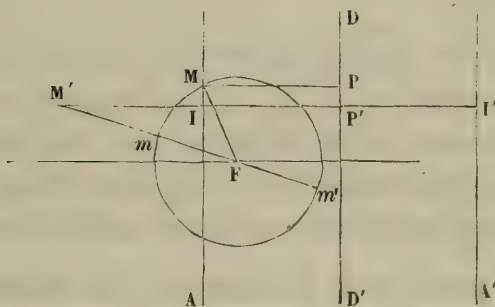
*Remarque.* — La première propriété peut être établie

géométriquement d'une manière simple. Soient, en effet,  $F$  et  $DD'$  le foyer et la directrice d'une courbe du second degré ; soient, en outre,  $M$  et  $M'$  deux points de cette courbe. On a, en désignant par  $K$  l'excentricité,

$$\frac{MF}{MP} = \frac{M'F}{M'P'} = K.$$

On en déduit

$$\frac{M'F - MF}{M'P' - MP} = \frac{M'F + MF}{M'P' + MP} = K.$$



Du point  $F$  comme centre, avec  $MF$  comme rayon, décrivons une circonférence, et menons  $IA$  et  $I'A'$  parallèles à la directrice, et telles que  $IP' = I'P' = MP$ . On voit immédiatement, sur la figure, que l'on a

$$\begin{aligned} M'F - MF &= M'm, & M'P' - MP &= M'I, \\ M'F + MF &= M'm', & M'P' + MP &= M'I'. \end{aligned}$$

On a, par suite,

$$\frac{M'm}{M'I} = \frac{M'm'}{M'I'} = K,$$

relations qui expriment la première propriété dont il est question dans ce travail.

## SUR UN THÉORÈME DE PAPPUS

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 337 );

Extrait d'une lettre de M. LAQUIÈRE.

.... Je reviens à la question dont la démonstration naturelle est essentiellement géométrique. Je serais infiniment surpris que mon raisonnement, qui saute aux yeux à simple énoncé, ne fût pas celui de Pappus lui-même, et que ce géomètre n'eût pas vu, sinon énoncé, la généralisation.

*Si des masses égales  $m$  partent en même temps des sommets successifs 1, 2, 3, ...,  $n$  d'un polygone fermé, pour en parcourir dans le même sens les côtés avec des vitesses proportionnelles aux longueurs de ces derniers, le centre de gravité des  $n$  masses mobiles restera fixe.*

Soit  $M$  la position de la masse  $m$  à un moment donné sur le côté  $AB$  qu'elle partage en longueurs proportionnelles à  $t$  et  $\theta - t$ , en désignant par  $\theta$  et  $t$  les durées des courses  $AM$  et  $AB$ . La masse  $m$  aura même centre de gravité que deux masses  $m \frac{\theta - t}{\theta}$  et  $m \frac{t}{\theta}$  placées la première en  $A$  et la seconde en  $B$ . Si l'on opère de même sur les  $n$  masses mobiles, on voit qu'à chaque instant le centre de gravité du système est le même que celui de  $2n$  masses distribuées uniformément aux sommets du polygone, dont chacun supporterait les masses  $m \frac{t}{\theta}$ , provenant du mobile de gauche, et  $m \frac{\theta - t}{t}$ , provenant du mobile de droite, si le mouvement est de gauche à droite, c'est-à-dire supporterait la masse constante  $m$ . Il est donc invariable.

C. Q. F. D.

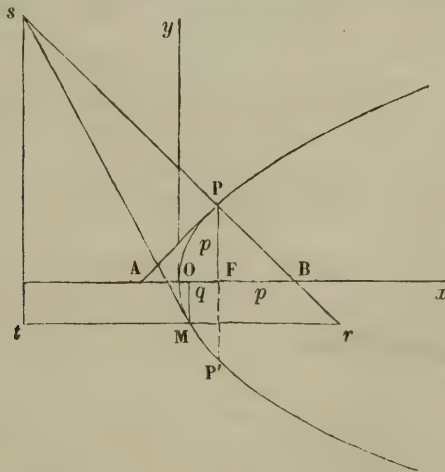
# SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881;

PAR M. J.-B. POMEY,  
Élève de l'École Polytechnique.

*Une parabole étant donnée, on lui mène une normale en l'un des points P situés, avec le foyer F, sur une même perpendiculaire à l'axe.*

*Trouver le lieu des sommets des sections faites par des plans contenant cette normale dans le cylindre dont la parabole donnée est la section droite.*

Les points du lieu se trouvent situés sur les génératrices partant de l'arc  $OP'$ ,  $P'$  étant le symétrique de P. En effet, soit M un point où se projette un point quel-



conque du lieu; l'axe de la parabole-section se projette suivant le diamètre  $Mr$ ; la tangente au sommet se projette suivant la tangente  $Ms$  à la base du cylindre. L'angle  $SMr$  est la projection d'un angle droit; donc il doit



être obtus; donc  $M$  est sur l'arc  $OP'$ . Le point du lieu se trouve à l'intersection de la normale en  $M$  au plan, avec la sphère décrite sur  $rs$  comme diamètre. Cette sphère passe par le point  $t$  sur  $Mr$ . La hauteur du point du lieu étant  $z$  au-dessus de la base, son carré  $z^2$  a pour valeur  $Mt.Mr$ , comme on le voit dans le petit cercle découpé dans la sphère susdite par le plan vertical  $tMr$ .

Cela posé, la tangente en  $M(x', y')$  a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

en posant

$$m = \frac{p}{y'},$$

car  $m$  et  $y'$  sont négatifs. La normale  $PB$  a pour équation

$$x + y = \frac{3p}{2}.$$

Cherchons l'abscisse du point d'intersection. On a

$$x(1 + m) = \frac{3p}{2} - \frac{p}{2m} = \frac{p}{2m} (3m - 1),$$

ou

$$x = \frac{p}{2m} \frac{3m - 1}{1 + m}$$

et

$$Mt = x' + (-x),$$

car  $x$  est négatif. Donc

$$Mt = x' - \frac{p}{2} \frac{p}{y'} \frac{3p - y'}{y' + p} = x' - \frac{y'}{2} \frac{3p - y'}{y' + p}.$$

On a

$$Mr = \frac{p}{2} - x' + p - y' = \frac{3p}{2} - x' - y'.$$

Donc, les équations du lieu sont, en supprimant les ac-

cents,

$$y^2 = 2px,$$

$$(y+p)z^2 = \left[ x(y+p) - \frac{y}{2}(3p-y) \right] \left( \frac{3p}{2} - x - y \right).$$

La projection de la courbe sur le plan  $yOz$  a pour équation

$$z^2 = \frac{1}{y+p} y \left[ \frac{y}{2p}(y+p) - \frac{3p-y}{2} \right] \left( \frac{3p}{2} - \frac{y^2}{2p} - y \right),$$

$$z^2 = \frac{y(y-p)}{4p^2(y+p)} (y+3p)(3p^2-2py-y^2),$$

$$z^2 = -y \frac{(y-p)^2(y+3p)^2}{4p^2(y+p)};$$

c'est une courbe du cinquième ordre à deux points isolés.

Pour que  $z$  soit réel, on voit bien qu'il faut que  $y$  et  $y+p$  soient de signe contraire, c'est-à-dire que  $y$  soit négatif et inférieur à  $p$ . On voit que  $z$  devient infini pour  $y = -p$ , c'est-à-dire que la courbe gauche est asymptote à la génératrice  $P'$ ; elle passe par le sommet (origine). Elle a le point  $P$  comme point isolé, ce qui est évident, et le point  $y = -3p$ ,  $x = \frac{9p^2}{2p} = \frac{9}{2}p$ , où la normale  $PB$  rencontre la parabole : c'est lorsque le plan de section devient vertical qu'on obtient ces points. On s'assure que la génératrice  $O$  au sommet est une tangente.

*Note.* — Autres solutions par MM. l'abbé Geneix-Martin et Moret-Blanc.

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION  
A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1884 ;**

PAR M. MORET-BLANC.

*On considère la courbe du troisième ordre*

$$27y^2 = 4x^3.$$

1° *On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres  $m$  et  $n$  pour que la droite*

$$y = mx + n$$

*soit tangente à cette courbe.*

2° *On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation*

$$x^2 + y^2 + 2axy = B.$$

3° *Par un point  $A$  pris sur la courbe, on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables  $M, M'$ . On demande le lieu du milieu des segments  $M, M'$ .*

*Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points  $M, M'$  sont réels.*

I. Si l'on élimine la variable  $z$  entre les deux équations, rendues homogènes,

$$4x^3 = 27y^2z,$$

$$y = mx + nz,$$

l'équation résultant de cette élimination

$$4nx^3 - 27m^2xy^2 - 27y^3 = 0$$

représente trois droites menées de l'origine aux points d'intersection de la cubique et de la droite. La condition pour que cette droite soit tangente est que deux des valeurs de  $\frac{x}{y}$  déduites de l'équation précédente soient égales.

Ceci aura lieu :

1° Pour  $n = 0$ , quel que soit  $m$ , parce que, l'origine étant un point de rebroussement, toute droite qui y passe y rencontre la courbe et deux points coïncidents, sans être une véritable tangente.

2° Si l'on a

$$\left(\frac{9m}{4n}\right)^3 + \left(\frac{27}{8n}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{m^3}{n} + 1 = 0,$$

d'où

$$n = -m^3,$$

qui est la vraie condition.

L'équation générale des tangentes à la courbe est donc

$$y = mx - m^3.$$

II.  $m'$  et  $m''$  étant les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de la conique

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = B,$$

on a la relation

$$m'm'' + a(m' + m'') + 1 = 0.$$

Les coefficients angulaires  $m, m', m''$  des trois tangentes menées d'un point  $(x, y)$  du lieu demandé à la courbe donnée, qui est de la troisième classe, étant les racines de l'équation

$$(1) \quad m^3 - mx + y = 0,$$

on a

$$mm'm'' = -y, \quad m + m' + m'' = 0,$$



d'où

$$m'm'' = -\frac{m}{y}, \quad m' + m'' = -m.$$

Substituant ces valeurs dans la relation

$$m'm'' + a(m' + m'') + 1 = 0,$$

il vient

$$(2) \quad am^2 - m + y = 0.$$

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant  $m$  entre les équations (1) et (2). On a successivement

$$m^2 - am - (x - 1) = 0,$$

$$(a^2 - 1)m + a(x - 1) + y = 0,$$

$$m = -\frac{ay + y - a}{a^2 - 1},$$

$$(ax + y - a)^2 + (a^2 - 1)(x + ay - 1) = 0,$$

équation d'une parabole dont la droite  $ax + y - a = 0$  est un diamètre et la droite  $x + ay - 1 = 0$  la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

III. Soient  $x_1, y_1$  les coordonnées du point A. L'équation d'une sécante issue de ce point est

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Éliminant  $y$  entre cette équation et celle de la cubique donnée, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection, l'équation

$$4x^3 - 27(mx + y_1 - mx_1)^2 = 0,$$

qui, développée et divisée par  $x - x_1$ , donne

$$4x^2 + (4x_1 - 27m^2)x + 4x_1^2 - 54my_1 + 27m^2x_1 = 0.$$

L'abscisse du point milieu du segment MM' est

$$x = \frac{27m^2 - 4x_1}{8},$$

et l'on obtient l'équation du lieu des points milieux en éliminant  $m$  entre cette équation et celle de la sécante, ce qui donne

$$27(y - y_1)^2 = 4(2x + x_1)(x - x_1)^2,$$

ou, en transportant l'origine au point A,

$$27y^2 = 4x^2(2x + 3x_1).$$

La courbe est une cubique de la quatrième classe passant par le point A et par le point de rebroussement de la proposée; elle est symétrique par rapport au nouvel axe des  $x$  qu'elle coupe aux points  $x = -\frac{3}{2}x_1$  et  $x = 0$ , en formant une boucle entre ces deux points, et s'étend indéfiniment vers les  $x$  positifs en tendant à devenir parallèle à l'axe des  $y$ . Elle affecte la forme d'un  $\alpha$ .

La séparation des arcs qui correspondent aux sécantes pour lesquelles les points M, M' sont réels ou imaginaires se fait évidemment aux points où M et M' se confondent, c'est-à-dire au point de rebroussement O de la courbe proposée et au point de contact T de la tangente issue du point A.

L'arc OBAT correspond aux points M et M' imaginaires. B est le sommet de la boucle.

Si le point A est le point de rebroussement, la courbe

$$27y^2 = 8x^3$$

est homothétique à la proposée et, comme elle, la développée d'une parabole.

*Note.* — Solutions analogues de MM. Givelet, de Reims; Henri Cartier, élève du lycée d'Angoulême.

**SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION  
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880;**

PAR M. HENRI CARTIER,  
Élève du lycée d'Angoulême.

*On donne une ellipse et un cercle ayant pour centre un foyer F de l'ellipse. On demande :*

*1° De trouver le lieu I du point tel que, si l'on mène de ce point des tangentes à l'ellipse et au cercle, les coefficients angulaires  $m$  et  $m'$  des tangentes à l'ellipse et les coefficients angulaires  $k$  et  $k'$  des tangentes au cercle vérifient la relation*

$$2(mm' + kk') = (m + m')(k + k');$$

*2° De trouver l'équation du lieu P du point de contact des tangentes menées par un point donné à tous les lieux I correspondant aux diverses valeurs du carré du rayon du cercle;*

*3° De construire le lieu P quand le point donné est sur le grand axe de l'ellipse;*

*4° De construire le lieu P lorsque le point donné est sur la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse.*

1° Prenons le foyer F pour origine, et supposons que ce soit le foyer de droite. L'équation de l'ellipse est

$$(E) \quad \frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

celle du cercle est

$$(C) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Soit  $(x, y)$  un point I. Les coefficients angulaires des

tangentes menées de ce point à l'ellipse sont donnés par

$$y - m(x + c) = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

ou

$$m^2[(x + c)^2 - a^2] - 2my(x + c) + y^2 - b^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées au cercle sont donnés par

$$y - kx = \pm \sqrt{r^2(1 + k^2)}$$

ou

$$(x^2 - r^2)k^2 - 2kxy + y^2 - r^2 = 0.$$

Ces coefficients vérifiant la relation de l'énoncé, on a

$$\frac{y^2 - b^2}{(x + c)^2 - a^2} + \frac{y^2 - r^2}{x^2 - r^2} = \frac{2xy^2(x + c)}{[(x + c)^2 - a^2](x^2 - r^2)}$$

ou

$$(I) \quad (x^2 + y^2)(b^2 + r^2) + 2cr^2x - 2b^2r^2 = 0.$$

Ce lieu I est un cercle ayant son centre sur le grand axe de l'ellipse.

2° Soit  $(\alpha, \beta)$  un point M. Sa polaire par rapport à (I) est

$$\alpha x (b^2 + r^2) + cr^2 x + cr^2 \alpha + \beta y (b^2 + r^2) - 2b^2 r^2 = 0.$$

Éliminons  $r^2$  entre cette équation et I, on a le second lieu

$$(P) \quad (x^2 + y^2)(cx + c\alpha - 2b^2) - 2(cx - b^2)(\alpha x + \beta y) = 0.$$

Ce lieu est du troisième degré, et passe aux points circulaires à l'infini.

La tangente à l'origine est  $\alpha x + \beta y = 0$ . Elle correspond au cas où  $r = 0$ ; le cercle I se réduit à un point F, et la polaire de M par rapport à ce cercle de rayon nul est la perpendiculaire  $\alpha x + \beta y = 0$  menée en F à FM.



Le lieu passe en M où la tangente est parallèle à  $\alpha x + \beta y = 0$ . Ceci est évident, si l'on remarque que le cercle I passe par M pour une valeur particulière de  $r$ .

Si nous considérons le cercle ayant FM pour diamètre, nous voyons que le lieu est doublement tangent à ce cercle, la corde des contacts étant FM. Comme le lieu et le cercle se coupent généralement en six points, les deux autres points sont en même temps réels ou imaginaires.

Le lieu a pour asymptote réelle la droite

$$cx - 2b^2 + cx = 0,$$

qui est perpendiculaire à Ox. L'équation (P) montre que le lieu coupe cette asymptote et la tangente à l'origine  $\alpha x + \beta y = 0$  au même point.

Les points de la courbe situés sur Ox, autres que l'origine, ont leurs abscisses égales à

$$\frac{2b^2 - \alpha c \pm (2b^2 - \alpha c)}{2c}.$$

L'un est la projection de M sur cet axe, l'autre a pour abscisse  $\frac{2b^2}{c}$ .

De même les deux points situés sur Oy sont réels, et l'un est la projection de M sur cet axe.

Le lieu a donc, dans le cas général, la forme de la figure.

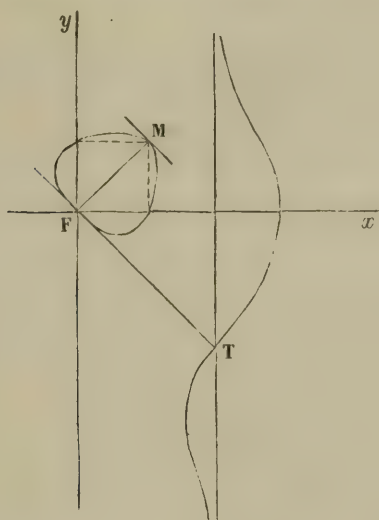
3° Si P est sur le grand axe de l'ellipse  $\beta = 0$ , l'équation (P) devient

$$(x^2 + y^2)(cx + cx - 2b^2) - 2xx(cx - b^2) = 0.$$

Le lieu est symétrique par rapport à l'origine. Il jouit des mêmes propriétés que dans les cas précédents.

Nous pouvons remarquer que, dans ce cas, l'asymptote et la tangente à l'origine devenant parallèles, le point T est rejeté à l'infini.

La partie fermée de la courbe ne coupe pas le cercle

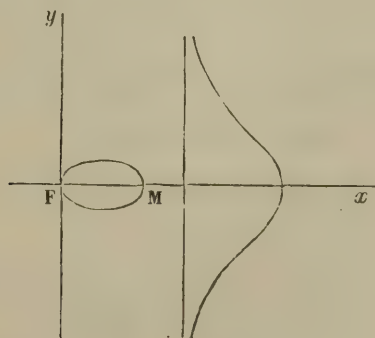


$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ , ayant FM pour rayon, ailleurs qu'en M ou F. Écrivons P sous la forme

$$(P) (x^3 + y^2 - 2ax)(cx - b^2) + (x^2 + y^2)(cx - b^2) = 0.$$

Les points communs au cercle et à (P) sont sur les droites

$$x^2 + y^2 = 0.$$



Ils sont imaginaires, car, s'ils étaient réels, ces droites

seraient réelles, puisqu'elles auraient un deuxième point réel à l'origine.

Le lieu a la forme de la figure.

Son troisième point de rencontre avec l'axe  $Ox$  a pour abscisse  $\frac{2b^2}{c}$ .

3° Si le point  $M$  est sur la directrice correspondant au foyer  $F$ , on a

$$x = \frac{b^2}{c};$$

l'équation (P) devient

$$(cx - b^2) \left[ x^2 + y^2 - 2 \left( \frac{b^2}{c} x + \frac{b^2}{c} y \right) \right] = 0.$$

Il se décompose en la directrice

$$cx - b^2 = 0,$$

relative au foyer  $F$ , et en

$$x^2 + y^2 - 2 \left( \frac{b^2}{c} x + \frac{b^2}{c} y \right) = 0;$$

c'est le cercle ayant pour  $FM$  son rayon.

*Note.* — Solutions analogues par MM. l'abbé Geneix-Martin, de l'école Saint-Sigisbert, à Nancy; Grimaud, maître répétiteur au lycée de Tarbes; L. Kien, élève de Notre-Dame du Sacré-Cœur, à Plaisance; H. Lez.

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1880

(PREMIÈRE SESSION);

PAR M. H. LEZ.

*Soient  $Ox, Oy$  deux axes rectangulaires, et sur  $Ox$  un point  $A$ , sur  $Oy$  un point  $B$ . On mène par le point  $A$  une droite quelconque  $AR$  de coefficient angulaire  $m$ .*

1° Former l'équation de l'hyperbole H, qui est tangente à l'axe Ox au point O, qui passe par le point B et pour laquelle la droite AR est une asymptote.

2° On fait varier  $m$  et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole H et de l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ; puis, faisant varier  $m$ , trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point O, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

Si la droite

$$(1) \quad \text{AR} \quad \text{ou} \quad y - mx + ma = 0$$

est une asymptote, l'autre asymptote est de la forme

$$y + \gamma x + \delta = 0,$$

et l'on pourra représenter l'hyperbole H par

$$(2) \quad (y - mx + ma)(y + \gamma x + \delta) - k^2 = 0.$$

Pour que cette courbe passe par l'origine O et soit tangente à l'axe Ox, il faut que le terme constant et le terme en  $x$  disparaissent, ce qui donne

$$ma\delta = k^2, \quad \delta = a\gamma.$$

Alors l'équation (2) devient

$$(3) \quad y^2 - \gamma m x^2 + (\gamma - m)xy + a(m + \gamma)y = 0.$$

1° Cette hyperbole passera aussi par le point

$$B(x = 0, y = b),$$

si l'on a

$$a\gamma = -(b + am),$$



ce qui ramène l'équation (3) à

$$(4) \quad ay^2 + m(b + am)x^2 - (b + 2am)xy - aby = 0 = H.$$

2° Le coefficient angulaire des tangentes à cette hyperbole étant

$$\mu = \frac{2m(b + am)x - y(b + 2am)}{ab + (b + 2am)x - 2ay},$$

au point B il sera

$$\mu = \frac{b + 2am}{a}.$$

La tangente au même point aura pour équation

$$(5) \quad a(y - b) = (b + 2am)x.$$

Éliminant  $m$  entre les équations (1) et (5), on obtiendra pour le lieu demandé l'équation

$$bx^2 + axy + a^2y - a^2b = 0,$$

décomposable en deux facteurs linéaires,

$$(x + a)(ay + bx - ab) = 0,$$

dont le second est la droite AB (1).

3° Soit  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$  l'équation de PQ, celle de OB étant  $x = 0$ ; la courbe

$$H - \lambda x(qx + py - pq) = 0$$

deviendra le cercle

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

(1) M. Moret-Blanc en conclut ce théorème :

*Si, par un point O d'une hyperbole, on mène une tangente OA et une normale OB qui rencontre l'hyperbole en un point B, la tangente en B à l'hyperbole et la perpendiculaire à la tangente OA, au point où elle rencontre une des asymptotes, se rencontrent sur l'autre asymptote.*

circonscrit au triangle AOB, si

$$\lambda = -\frac{a^2}{pq}, \quad p = \frac{a^2}{a - m(b + am)}, \quad q = \frac{a^2}{b + 2am}.$$

On a ainsi pour la droite PQ

$$(6) \quad (b + 2am)y + [a - m(b + am)]x = a^2.$$

L'équation de l'hyperbole H pouvant s'écrire sous la forme

$$[y - m(x - a)] \\ \times [ay - (b + am)(x + a)] + a^2m(b + am) = 0,$$

on voit que les droites menées par l'origine O parallèlement aux deux asymptotes seront

$$y = mx \quad \text{et} \quad y = \frac{b + am}{a}x.$$

Éliminant successivement  $m$  entre ces équations et celle de la droite (6), on trouve que les lieux demandés se confondent et ne sont autre chose que le cercle

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

décrit sur OA comme diamètre (1).

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, qui a également résolu la question proposée à la deuxième session et dont une solution a paru (2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 464), par M. Chambeau, élève de Notre-Dame du Sacré-Cœur, à Plaisance, et par M. J. Boudènes, à Avignon.

(1) M. Moret-Blanc en conclut ce théorème :

*Si, par un point O d'une hyperbole, on mène une tangente OA qui rencontre une asymptote en A et une normale OB qui rencontre l'hyperbole en B, la circonférence circonscrite au triangle AOB coupe l'hyperbole en deux autres points P et Q tels que la droite PQ rencontre les parallèles menées par le point aux asymptotes en deux points appartenant à la circonférence décrite sur OA comme diamètre.*

MM. Moret-Blanc et Pisani ont résolu les questions 1352 et 1355, dont une solution a été publiée (2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 340, 342 et 344). M. Pisani a aussi résolu les questions 1373 et 1374. M. l'abbé Geneix-Martin a résolu la question 1376, au sujet de laquelle M. Catalan a fait une rectification (2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 528). Cette question a aussi été résolue par MM. J.-J.-A. Mathieu, lieutenant-colonel d'artillerie; H. Lez; N. Goffart; F. Pisani; François Borletti, ingénieur à Milan; Juan Gavino, au Ministère de la Marine, à Madrid; Adrien Palaz et Henri Vuilleumier, élèves à l'École polytechnique de Zurich; A. Hottenhoff, E. Stache, J. de Munck, élèves de l'Athénée de Bruxelles; V. Fleury, L. Meyer, H. Vielle, A. Leblond, élèves du lycée du Havre; J. Boudènes, du lycée d'Avignon.

---

## ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1881).

### *Géométrie.*

I. Démontrer que deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.

II. Dans un triangle ABC, on donne  $b$  et  $a$ . Une transversale rencontre AB au point D, AC au point E, BC au point F. On donne  $AE = \beta$ ;  $FB = m$ . Démontrer que, si l'on appelle  $\Sigma$  la surface de ADE, S la surface de ABC, on a

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{1 + \frac{a}{m} \frac{\beta^2}{b^2}}{1 + \frac{a}{m} \frac{\beta}{b}}$$

### *Statique.*

I. Un triangle ABC a l'un de ses sommets, A, qui est fixe. Déterminer la force à appliquer au point B pour que le côté BC soit horizontal.

II. On donne un triangle quelconque; on demande quel est le cercle qu'il faut enlever autour du centre du

cercle circonscrit pour que le centre de gravité de la partie restante soit au point de concours des hauteurs.

### *Arithmétique.*

Extraire la racine carrée de  $43 + \frac{5}{11}$  à  $\frac{1}{7}$  près. Raison-  
nement.

### *Algèbre.*

On coupe un cône par un plan parallèle à la base et l'on considère le cylindre droit ayant même base que le cône, et sa base supérieure sur le plan sécant. Étudier la variation de la somme de la surface latérale du cylindre et de la surface latérale du cône supérieur.

### *Trigonométrie.*

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

### *Géométrie descriptive.*

On donne un plan formant un angle de  $39^\circ$  avec le plan horizontal et dont la trace horizontale fait un angle de  $53^\circ$  avec la ligne de terre. Trouver les projections d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier ayant son centre et le milieu d'un des côtés sur la trace du plan. Cet hexagone est situé dans le plan; la hauteur de la pyramide est  $0^m, 15$ , le côté de l'hexagone a  $0^m, 03$ , et le sommet de la pyramide est dans le second dièdre. On cherchera la projection de la section par le plan bissecteur du premier dièdre.

---



---

**ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1881).**


---

*Mathématiques.*

1° Trouver la condition pour que deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient au moins une racine commune.

2° Résoudre l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}.$$

3° Trouver le lieu des centres qui coupent orthogonalement deux cercles donnés.

*Trigonométrie et calcul logarithmique.*

1° Calculer le côté AB d'un quadrilatère plan ABCD, connaissant le côté opposé

$$CD \dots\dots\dots 4137^m, 43,$$

et les angles

$$ADC \dots\dots\dots 110^{\circ}.35'.35''$$

$$BDC \dots\dots\dots 49.49.49, 49$$

$$ACD \dots\dots\dots 36.36.36, 36$$

$$BCD \dots\dots\dots 86.52.52, 52$$

2° Après avoir trouvé 4° pour la hauteur angulaire d'une tour, un observateur s'avance de 1<sup>km</sup> vers la tour; il trouve alors 5° pour la hauteur angulaire. Quelle est la longueur du chemin qui lui reste à parcourir pour arriver au pied de la tour?

---

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE (CONCOURS DE 1884) (').**


---

*Composition de Mathématiques.*

On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée du point P sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point M d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.

*Composition de Géométrie descriptive.*

Un tétraèdre régulier SABC a trois sommets A, B, C, situés à 0<sup>m</sup>,08 au-dessus du plan horizontal de projection; le premier A se trouve d'ailleurs à 0<sup>m</sup>,03 et les deux autres B, C à 0<sup>m</sup>,15 en avant du plan vertical.

On considère l'hyperboloïde H qu'engendrerait en tournant autour de AB la droite qui passe par les milieux des côtés SA, BC et celui qui résulterait de la révolution de la même droite autour de AC : déterminer les contours apparents de H par rapport aux plans de projection, ainsi que l'intersection des deux surfaces. On supposera que H est opaque et que l'autre hyperboloïde a été enlevé, après avoir marqué sa trace sur H.

La ligne de terre joindra les milieux des grands côtés du cadre de l'épure : on placera les projections de A en ligne droite avec les milieux des deux autres côtés.

---

(') Questions données à quelques élèves qui n'ont pu concourir que plus tard.

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1881

(PREMIÈRE SESSION).

*Géométrie analytique.*

Soit

$$(1) \quad a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à ses axes; soient  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation

$$(2) \quad c^2 x y + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0,$$

dans laquelle  $c^2 = a^2 - b^2$ .

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points communs aux courbes (1) et (2); dans chacune d'elles, on mène le diamètre conjugué à la direction OP, et on projette le point O sur ce diamètre: trouver le lieu de cette projection.

3° Par les points communs aux courbes (1) et (2), on peut faire passer deux paraboles: trouver le lieu du sommet de chacune d'elles, quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné  $m$ , menée par le point O.

On examinera en particulier le cas où  $m = \frac{a^3}{b^3}$  et le cas où  $m = -\frac{a^3}{b^3}$ .

*Trigonométrie.*

On donne dans un triangle

$$a = 4567^m, 89,$$

$$b = 3456^m, 78,$$

$$C = 54^{\circ} 21' 43'', 7.$$

Calculer A, B, c et S.

*Physique et Chimie.*

I. Un cylindre de verre CC' communique, par sa partie inférieure, avec un tube en fer ff', ouvert à son extrémité supérieure. Les rayons du tube en fer et du cylindre sont dans le rapport de 1 à 5.

On introduit dans le cylindre une certaine quantité de mercure qui s'élève au même niveau dans le tube de fer; les deux surfaces libres du mercure se trouvent alors sur le même plan horizontal AB.

On fait ensuite communiquer la partie supérieure du cylindre avec une masse d'eau contenue dans un vase métallique R; cette communication est établie au moyen d'un tube de plomb assez large pour que l'air qui se trouve au-dessus du mercure puisse se dégager. On comprime de l'air dans le récipient R, jusqu'à ce que la pression exercée à la surface de l'eau, dont le niveau peut être considéré comme constant, soit de 8 atmosphères.

La hauteur de la colonne d'eau,  $h$ , comptée à partir de AB, était de  $1^m, 68$ ; quelle est, après l'expérience, la différence de niveau des surfaces du mercure dans l'appareil?

On prendra, pour densité du mercure, le nombre 13,5.



## II. Préparation et propriétés chimiques de l'ammoniac.

Détermination de la densité théorique du gaz ammoniac, connaissant les densités de l'hydrogène et de l'azote.

Densité de l'hydrogène .....	0,0692
» de l'azote .....	0,972

### *Épure.*

On propose de construire les projections des lignes d'intersection d'un hémisphère et des faces d'un cube avec un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Le cube ( $abde$ ,  $a'b'd'e'$ ), dont le côté a 0<sup>m</sup>,200 de longueur, dont la face inférieure et la face postérieure sont respectivement situées dans les deux plans de projection, contient entièrement l'hémisphère ( $h$ ,  $h'$ ); cet hémisphère a pour base le cercle ( $h$ ,  $h'$ ) inscrit dans la face antérieure du cube.

L'hyperboloïde a son axe ( $z$ ,  $z'$ ) vertical, à 0<sup>m</sup>,135 du plan vertical de projection et à égale distance des faces de profil du cube; la cote du centre ( $o$ ,  $o'$ ) de cette surface est de 0<sup>m</sup>,132; les rayons de son collier ( $c$ ,  $c'$ ) et de sa trace horizontale ( $\theta$ ,  $\theta'$ ) ont respectivement 0<sup>m</sup>,035 et 0<sup>m</sup>,100 de longueur.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le cube existe seul, qu'il est solide, et qu'on a enlevé la partie de ce corps comprise dans l'hémisphère et dans l'hyperboloïde. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions nécessaires pour obtenir un point quelconque de chacune des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

---



---

COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS  
LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880

[ SUITE (1) ].

SESSION DE JUILLET.

## Lyon.

*Composition d'Analyse.* — Déterminer en coordonnées curvilignes ( $u, v$ ) le rayon de courbure d'une section normale à une surface.

Faire voir que ce rayon passe par un maximum et un minimum, quand on fait varier le rapport  $\frac{du}{dv}$ .

*Composition de Mécanique.* — Mouvement d'un point matériel soustrait à l'action de toute force extérieure et assujetti seulement à se mouvoir sur un ellipsoïde donné.

*Épreuve pratique.* — Le 17 juillet 1880, à midi moyen de Paris, la planète Mars a pour coordonnées héliocentriques :

Longitude héliocentrique.....	167° 5' 26", 3
Latitude.....	1° 37' 37", 8
Logarithme du rayon vecteur.....	0,2204213

Au même instant la longitude du Soleil est 115° 12' 9", 2.  
On a longitude du rayon vecteur de la Terre = 0,0069929.  
Déterminer la longitude et la latitude géocentriques de la planète à l'instant considéré.

## Montpellier.

*Composition d'Analyse.* — Intégration de l'équa-

---

(1) *Nouvelles Annales*. 3<sup>e</sup> série, t. I. p. 87.

tion différentielle linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants : 1° lorsqu'elle est privée de second membre ; 2° lorsqu'elle possède un second membre fonction de  $x$ .

*Composition de Mécanique.* — Mouvement d'un point matériel pesant assujéti à se trouver constamment dans un plan qui tourne uniformément autour d'un axe vertical situé dans ce plan. Le mobile éprouve en outre la résistance d'un milieu supposée proportionnelle à la vitesse.

*Épreuve pratique.* — Les hauteurs apparentes de deux étoiles sont respectivement égales à  $48^{\circ}0'49''$  et  $70^{\circ}34'9''$ . Leur distance apparente est  $58^{\circ}8'48''$  :

1° Calculer les éléments nécessaires pour déterminer la distance vraie de ces étoiles ;

2° Former avec ces éléments le tableau des calculs à effectuer pour arriver à son expression numérique.

### Nancy.

*Composition d'Analyse.* — 1° Intégrer l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial y} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial z} + (a - yz) \frac{\partial z}{\partial z} + (b - yu) \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

2° Trouver la valeur de l'intégrale définie  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  et en conclure les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

*Composition de Mécanique.* — 1° En un point O de la surface de la Terre, situé à la latitude  $\lambda$ , on considère un plan poli P, supposé vertical et perpendiculaire au plan méridien. Un mobile pesant assujéti à demeurer

dans le plan P est lancé du point O avec une vitesse initiale donnée.

Étudier le mouvement du mobile dans le plan P, en tenant compte de la rotation de la Terre. Calculer la réaction du plan.

2° Un corps solide dont deux points sont fixes est en équilibre sous l'action de forces données. Rechercher les pressions supportées par les deux points fixes.

*Épreuve pratique.* — Résolution d'un triangle sphérique.

#### Poitiers.

*Composition d'Analyse.* — Trouver les courbes telles que, si par le point N où une normale quelconque MN rencontre l'axe Ox on mène une parallèle à la tangente en M, cette droite passe par un point A donné sur l'axe Oy.

Trouver les trajectoires orthogonales de ces courbes.

*Composition de Mécanique.* — Un point matériel, non pesant, est lancé avec une vitesse  $v_0$ , parallèlement à une droite fixe vers laquelle il est attiré avec une force proportionnelle à la distance et dont la valeur est  $\mu$  à l'unité de distance; il éprouve en outre, de la part du milieu dans lequel il se meut, une résistance proportionnelle à sa vitesse et dont la valeur est  $2k$  pour une vitesse égale à l'unité.

Étudier les divers cas que peut présenter le mouvement de ce point suivant les grandeurs relatives de  $\sqrt{\mu}$  et de  $k$ .

*Épreuve pratique.* — Quels seront, le 18 juillet



1880, l'azimut et la distance zénithale d'Arcturus, l'heure sidérale étant 18<sup>h</sup>.

Latitude de Poitiers.....	46° 34' 55"
Ascension droite d'Arcturus.....	14 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup> , 97
Déclinaison boréale.....	19° 48' 21", 7

### Toulouse.

*Composition d'Analyse.* — 1° On considère la surface représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$zx^2 = ay^2,$$

$a$  étant une constante. Trouver ses lignes asymptotiques.

2° Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2a^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a^4 y = \cos ax,$$

où  $a$  est une constante.

*Composition de Mécanique.* — Soit un fil  $l$ , inextensible et sans poids, aux extrémités duquel sont attachées deux petites masses pesantes  $m, m'$ ; l'une d'elles  $m'$  glisse sur un plan horizontal fixe PQ, tellement placé que le fil  $aABb$  s'enroule sur un cylindre droit par un quart de cercle AB, ce cylindre tournant autour d'un axe horizontal passant par le centre O de la circonférence AB. On demande la loi du mouvement de chacune des masses  $m, m'$  et du cylindre, ainsi que les tensions des brins de fil  $aA, Bb$ .

On tiendra compte du frottement de glissement de la masse  $m'$  sur le plan PQ et de la résistance de l'air, résistance que l'on supposera proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

*Épreuve pratique.* — Résoudre un triangle sphérique géodésique, connaissant deux côtés  $b, c$  et l'angle compris  $A$ .

Rennes.

*Composition d'Analyse.* — 1° Trouver une courbe telle que l'angle MOT sous lequel on voit d'un point donné  $O$  la portion MT de tangente à cette courbe comprise entre le point de contact  $M$  et une droite fixe  $DD'$  soit constant.

2°  $C$  étant le point de rencontre du rayon vecteur  $OM$  avec la droite  $CC'$  parallèle à  $DD'$  et menée à égale distance du point  $O$  et de cette droite, trouver le lieu géométrique du point  $P$  conjugué harmonique du point  $C$  par rapport aux deux points  $O$  et  $M$ , et conclure de là une manière simple de déduire les points de la courbe en question d'une courbure connue, ainsi que la construction de la tangente.

Examiner spécialement le cas où l'angle MOT est égal à  $90^\circ$ .

*Composition de Mécanique.* — Définir le mouvement tautochrone. Un point sollicité par une force qui ne dépend que de la position ayant un mouvement rectiligne tautochrone, donner l'expression de cette force.

Expression de la composante tangentielle dans le mouvement tautochrone curviligne. Détermination de la courbe tautochrone dans le cas d'un point pesant, et étude de ce mouvement.

*Épreuve pratique.* — Épure : intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan.

Clermont.

*Composition d'Analyse.* — Donner une méthode pour avoir les courbes dans lesquelles le rayon de cour-

bure  $\rho$  est une fonction donnée de l'angle  $\alpha$  que la tangente à la courbe fait avec une direction fixe

$$\rho = f(\alpha).$$

Application aux cas où  $f(\alpha) = a \cos \alpha$ ,  $f(\alpha) = \frac{a}{\cos^2 \alpha}$ .

*Composition de Mécanique.* — Théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. Cas où le corps se réduit à trois points de masses  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ , situés sur une même perpendiculaire à cet axe.

*Épreuve pratique.* — En un lieu de la Terre, on observe l'azimut  $\alpha$  d'une étoile à son lever et sa hauteur méridienne  $h$ . On demande la latitude du lieu et la déclinaison de l'étoile.

Dijon.

*Composition d'Analyse.* — Exposer une méthode permettant de déduire l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque de celle de la même équation privée de son second membre. Appliquer cette méthode à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 6 \frac{du}{dx} + 9u = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}.$$

*Composition de Mécanique.* — Soient trois axes coordonnés rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , l'axe des  $z$  étant vertical et dirigé vers le haut; on considère un parabolôïde de révolution ayant pour équation

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a}.$$

Un point matériel pesant mobile sur la surface est repoussé par l'axe  $Oz$  proportionnellement à la distance. Étudier le mouvement du point, sachant que les coor-

données initiales du mobile sont

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a}{2},$$

et les projections de la vitesse initiale

$$(v_x)_0 = 0, \quad (v_y)_0 = b, \quad (v_z)_0 = 0, \quad b > 0.$$

Former l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des  $xy$ , et discuter cette courbe dans les cas où elle a des branches infinies.

*Épreuve pratique.* — L'excentricité d'une planète étant supposée égale à  $\frac{1}{4}$ , calculer l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne correspondant à une anomalie excentrique égale à

$$30^\circ 19' 24'', 54.$$


---

#### SESSION DE NOVEMBRE.

##### Marseille.

*Composition d'Analyse.* — 1° Recherche des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de la surface

$$z = mxy.$$

2° Angles sous lesquels les premières lignes sont coupées par les secondes.

3° Courbes suivant lesquelles ces deux sortes de lignes se projettent sur le plan des  $xy$ .

*Composition de Mécanique.* — Un point M non pesant est mobile dans un canal circulaire poli; ce point est sollicité par une force perpendiculaire à un diamètre fixe AB de ce cercle et proportionnelle à la



distance du point  $M$  à ce diamètre. Trouver le mouvement du point  $M$ .

*Épreuve pratique.* — Résolution d'un triangle sphérique, connaissant les trois côtés.

#### Besançon.

*Composition d'Analyse.* — On demande de calculer la surface détachée sur une des nappes d'un cône de révolution par un plan sécant donné.

*Composition de Mécanique.* — Mouvement d'un pendule dans un milieu résistant, en supposant la résistance proportionnelle à la vitesse. Cas des petites oscillations.

*Épreuve pratique.* — Épure de Géométrie descriptive.  
( *A suivre.* )

#### QUESTIONS.

1384. D'un point pris sur une hyperbole équilatère on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur ces droites des segments proportionnels. (MANNHEIM.)

1385. On donne sur un plan une ellipse de centre  $o$  et un point fixe. De ce point, on mène une transversale qui rencontre l'ellipse au point  $p$ . Le diamètre conjugué de  $op$  coupe la transversale au point  $m$ .

Pour quelles directions de la transversale le segment  $pm$  est-il maximum ou minimum ? (MANNHEIM.)

1386. Soient A, B, C et D quatre points pris arbitrairement sur un cercle ayant pour centre le point O. Considérons l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points, et de son centre  $\omega$  abaissons une perpendiculaire  $\omega P$  sur un côté quelconque AB du quadrilatère ABCD; du centre O du cercle, abaissons une perpendiculaire OQ sur le côté opposé CD. En désignant par V l'angle que font les côtés AB et CD, démontrer la relation

$$\omega P = OQ \cos V. \quad (\text{LAGUERRE.})$$

1387. Soient deux cercles fixes C et C' tangents aux droites D et D'; on considère un cercle variable K qui touche C et C' et on lui mène des tangentes parallèles à D et D' : trouver le lieu de leur point de rencontre.

(LAGUERRE.)

1388. L'équation  $f(x) = 0$  a toutes ses racines réelles; soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux racines consécutives de cette équation. La dérivée  $f'(x)$  s'annule pour une valeur  $\omega$  comprise entre  $\alpha$  et  $\beta$ ; démontrer que  $\omega$  est comprise entre

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n},$$

$n$  désignant le degré de l'équation. (LAGUERRE.)

1389. L'équation de degré  $n$ ,  $f(x) = 0$ , a toutes ses racines réelles; l'équation  $f^2(x) + k^2 f'^2(x) = 0$ , où  $k$  désigne un nombre positif, a toutes ses racines imaginaires. Démontrer que, dans chacune de ces racines, le coefficient de  $i$  est inférieur à  $kn$ ; on suppose  $n \geq 2$ .

(LAGUERRE.)

1390. Considérons l'équation  $f(x) = 0$  qui a toutes ses racines réelles;  $k$  désignant un nombre réel arbitraire, supposons que l'équation  $f(x) + k = 0$  ait  $m$

racines imaginaires : démontrer que l'équation

$$f^{(2)}(x) - f(x)f'''(x) - kf''(x) = 0$$

a  $m$  racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

(LAGUERRE.)

1391. Soit  $k$  la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes. Démontrer que toute courbe parallèle à  $k$  peut être engendrée de la même façon.

(LAGUERRE.)

1392. Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \dots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que,  $\omega$  étant une quantité réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^2 x^2 + \dots + k\omega^{n-1} x^n = 0$$

a également ses racines réelles.

(LAGUERRE.)

1393. Soit le polynôme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynôme un certain nombre de termes de degré supérieur à  $n$ , on puisse obtenir un autre polynôme  $f(x)$ , tel que l'équation  $f(x) = 0$  ait toutes ses racines réelles : démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{1.2.3\dots n} + \frac{a_1 x}{1.2.3\dots(n-1)} + \frac{a_2 x^2}{1.2.3\dots(n-2)} + \dots \\ + \frac{a_{n-2} x^{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-1} x}{1} + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

(LAGUERRE.)

1394.  $f(x)$  désignant un polynôme quelconque à coefficients réels, on peut toujours déterminer un nombre

positif  $\omega$ , tel que le développement de  $e^{\omega x} f(x)$ , suivant les puissances croissantes de  $x$ , présente précisément autant de variations que l'équation  $f(x) = 0$  a de racines positives. (LAGUERRE.)

1393. Par un point quelconque  $M$  d'une hyperbole, on mène des droites parallèles aux asymptotes; par un autre point  $M'$  pris arbitrairement sur l'hyperbole, on mène deux cercles, tangents aux asymptotes et ayant leurs centres sur l'axe transverse de la courbe : démontrer que ces deux droites et ces deux cercles sont tangents à un même cercle. (LAGUERRE.)

---

### AVIS AUX CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

---

Le nouveau programme d'admission à l'École polytechnique n'ayant pu être inséré au *Journal Officiel* que le 17 janvier 1882, d'après l'avis du Conseil de perfectionnement de l'École, et avec l'autorisation du Ministre de la Guerre, des instructions seront données à l'Examinateur d'admission pour la Physique et la Chimie, afin qu'il n'interroge pas les candidats sur les matières du programme de Physique comprises sous les titres suivants :

*Électricité statique, magnétisme, électricité dynamique, électrodynamique, induction électrodynamique.*

Cette note ne concerne que les examens d'admission qui auront lieu en 1882.

*Le Directeur des Études.*

---



## L'ASTRONOMIE.

M. Camille FLAMMARION vient d'avoir l'heureuse idée de créer, à la librairie GAUTHIER-VILLARS, une Revue mensuelle d'Astronomie et de Physique, destinée à tenir tous les amis de la Science au courant des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'Univers. M. Flammarion est aidé dans cette œuvre par les principaux astronomes du monde.

Le premier Numéro vient de paraître (chez tous les libraires). Il sera envoyé en spécimen à toute personne qui en fera la demande à l'éditeur, quai des Augustins, 55, Paris.

### Sommaire.

*A nos Lecteurs* : Notre Programme. — *L'Observatoire de Paris* (2 figures, représentant l'Observatoire en 1672 et en 1882). — *Les Comètes* (1 figure: marche de la dernière grande Comète dans l'espace). — *Paysages lunaires* (1 figure). — *Académie des Sciences* (Communications relatives à l'Astronomie et à la Physique générale: L'abaissement de la mer à Antibes). — *Nouvelles de la Science*. — *Variétés* : Le prochain passage de Vénus. Chute d'un uranolithe. Découverte de nouvelles planètes. Comètes visibles à l'œil nu. — *Le Ciel en mars 1882*: Observations intéressantes à faire (5 figures).

Le journal L'ASTRONOMIE paraîtra le 1<sup>er</sup> de chaque mois, par fascicule de 40 pages (abonnement : 12 fr. par an), et donnera ainsi régulièrement le tableau vivant des conquêtes de la Science.

## ERRATA

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX).

Page 388, ligne 5 en remontant, *au lieu de* sous des angles dont le produit est constant, *lisez* sous des angles dont les sinus ont un produit constant.

Page 435, lignes 7 et 8, *au lieu de* aux génératrices, *lisez* aux focales.

Page 522, équation (5), *au lieu de*  $x^2, \beta^2, \gamma^2$ , *lisez*  $(x^2 - \beta\gamma \cos A)$   $(\beta^2 - \gamma x \cos B)$ ,  $(\gamma^2 - x\beta \cos C)$ .

Cette erreur a été signalée par M. Lez.

**STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL ATTIRÉ OU REPOUSSÉ PAR UN NOMBRE QUELCONQUE DE POINTS MATÉRIELS FIXES PROPORTIONNELLEMENT AUX MASSES ET A UNE PUISSANCE DE LA DISTANCE ;**

PAR M. A. LEGOUX,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Dans ce qui va suivre, nous traiterons seulement le cas de l'attraction. Celui de la répulsion se traiterait de la même manière; il suffirait de changer les signes des masses des points fixes.

Désignons par  $m_1, m_2, m_3, \dots$  les masses des points attirants  $A_1, A_2, A_3, \dots$ ; par  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$  les coordonnées de ces points; par  $x, y, z$  celles du point attiré M; par  $u_1, u_2, u_3, \dots$  les distances respectives du point M aux points  $A_1, A_2, \dots$ , et supposons que l'attraction du point  $A_1$  soit représentée par  $\frac{m_1}{u_1^{n+1}}$ , celle de  $A_2$  par  $\frac{m_2}{u_2^{n+1}}, \dots$

Si X, Y, Z désignent les composantes de l'attraction totale suivant trois axes rectangulaires quelconques, on a

$$X = \sum \frac{m_1 (x_1 - x)}{u_1^{n+2}},$$

$$Y = \sum \frac{m_1 (y_1 - y)}{u_1^{n+2}},$$

$$Z = \sum \frac{m_1 (z_1 - z)}{u_1^{n+2}},$$

$$u_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2, \dots;$$

dans la position d'équilibre, on aura

$$\begin{aligned}\sum \frac{m_1 (x_1 - x)}{u_1^{n+2}} &= 0, \\ \sum \frac{m_1 (y_1 - y)}{u_1^{n+2}} &= 0, \\ \sum \frac{m_1 (z_1 - z)}{u_1^{n+2}} &= 0.\end{aligned}$$

On peut prendre pour origine des coordonnées la position d'équilibre du point M, et si l'on désigne par  $d_1, d_2, \dots$  ce que deviennent alors les  $u_1, u_2, \dots$ , on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{m_1 x_1}{d_1^{n+2}} &= 0, \\ \sum \frac{m_1 y_1}{d_1^{n+2}} &= 0, \\ \sum \frac{m_1 z_1}{d_1^{n+2}} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ceci posé, appelons  $\varphi$  la fonction des forces définie par l'équation

$$\begin{aligned}d\varphi &= \sum \frac{m_1 [(x_1 - x)dx + (y_1 - y)dy + (z_1 - z)dz]}{u_1^{n+2}} \\ &= - \sum \frac{m_1 du_1}{u_1^{n+1}},\end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad \varphi = \sum \frac{1}{n} \frac{m_1}{u_1^n}.$$

Dans la position d'équilibre, on sait que  $\varphi = \text{constante}$ .

*Stabilité ou instabilité de l'équilibre du point matériel.* — On écartera très peu le point M de sa position d'équilibre, c'est-à-dire de l'origine des coordonnées. On considérera les coordonnées du point comme des quantités très petites et l'on négligera dans le développement les secondes puissances de ces quantités.

Les équations du mouvement seront, dans le cas général,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dx},$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dy},$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Développons le second membre d'après la série de Taylor, et remarquons que, pour  $x = y = z = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dx}$ ,  $\frac{d\varphi}{dy}$ ,  $\frac{d\varphi}{dz}$  sont nuls; on aura

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_0 x + \left( \frac{d^2 \varphi}{dx dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2 \varphi}{dx dz} \right)_0 z,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \left( \frac{d^2 \varphi}{dy dx} \right)_0 x + \left( \frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right)_0 y + \left( \frac{d^2 \varphi}{dy dz} \right)_0 z,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \left( \frac{d^2 \varphi}{dz dx} \right)_0 x + \left( \frac{d^2 \varphi}{dz dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)_0 z.$$

D'ailleurs, on trouve pour les dérivées secondes de  $\varphi$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \sum \left[ -\frac{m_1}{u_1^{n+2}} + \frac{(n+2)m_1(x_1-x)^2}{u_1^{n+4}} \right],$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} = \sum \left[ -\frac{m_1}{u_1^{n+2}} + \frac{(n+2)m_1(y_1-y)^2}{u_1^{n+4}} \right],$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \sum \left[ -\frac{m_1}{u_1^{n+2}} + \frac{(n+2)m_1(z_1-z)^2}{u_1^{n+4}} \right],$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx dy} = (n+2) \sum \frac{m_1(x_1-x)(y_1-y)}{u_1^{n+4}},$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dy dz} = (n+2) \sum \frac{m_1(y_1-y)(z_1-z)}{u_1^{n+4}},$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz dx} = (n+2) \sum \frac{m_1(z_1-z)(x_1-x)}{u_1^{n+4}}.$$



On remarque d'abord que

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = (n-1) \sum \frac{m_1}{u_1^{n+2}}.$$

En particulier, si  $n=1$  et si aucun des  $u_1$  n'est égal à 0, on a

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0;$$

c'est le théorème de Laplace dans le cas de l'attraction newtonienne.

Pour simplifier l'écriture, nous représenterons par  $a, b, c, f, g, h$  les valeurs des dérivées secondes de  $\varphi$  lorsque  $x=0, y=0, z=0$ ,

$$\begin{aligned} a &= (n+2) \sum \frac{m_1 x_1^2}{d_1^{n+4}} - \sum \frac{m_1}{d_1^{n+2}}, & f &= (n+2) \sum \frac{m_1 y_1 z_1}{d_1^{n+4}}, \\ b &= (n+2) \sum \frac{m_1 y_1^2}{d_1^{n+4}} - \sum \frac{m_1}{d_1^{n+2}}, & g &= (n+2) \sum \frac{m_1 z_1 x_1}{d_1^{n+4}}, \\ c &= (n+2) \sum \frac{m_1 z_1^2}{d_1^{n+4}} - \sum \frac{m_1}{d_1^{n+2}}, & h &= (n+2) \sum \frac{m_1 x_1 y_1}{d_1^{n+4}}. \end{aligned}$$

D'après cela, les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$(3) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = a x + h y + g z, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = h x + b y + f z, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = g x + f y + c z. \end{cases}$$

On intègre sans peine ces équations linéaires simultanées en posant  $x = A e^{rt}$ ,  $y = B e^{rt}$ ,  $z = C e^{rt}$ ; on a trois équations linéaires et homogènes en  $A, B, C$ ; ces trois équations déterminent les trois quantités  $\frac{C}{A}, \frac{B}{A}, r$ .

L'équation qui donne  $r$  est la suivante

$$\begin{vmatrix} mr^2 - a & -h & -g \\ -h & mr^2 - b & -f \\ -g & -f & mr^2 - c \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(4) \quad \begin{cases} (mr^2)^3 - (a + b + c)(mr^2)^2 \\ + (ab + bc + ca - f^2 - g^2 - h^2)mr^2 \\ - abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh = 0. \end{cases}$$

On sait que cette équation, qui a une forme identique avec celle qui se présente en Géométrie analytique dans la recherche des plans principaux des surfaces du second ordre, a toutes ses racines réelles. Or, pour que l'équilibre soit stable, il faut que  $x, y, z$  s'expriment par des sinus et des cosinus, c'est-à-dire que l'équation précédente ne fournisse que des valeurs imaginaires pour  $r$ ; il faut donc que l'équation du troisième degré en  $mr^2$  ait toutes ses racines négatives et inégales. D'après le théorème de Descartes, il faut et il suffit que cette équation n'ait que des permanences.

Donc les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre sont exprimées par les inégalités suivantes :

$$(5) \quad a + b + c < 0,$$

$$(6) \quad ab + ac + bc - f^2 - g^2 - h^2 > 0,$$

$$(7) \quad -abc - 2fgh + af^2 + bg^2 + ch^2 > 0.$$

En substituant à  $a, b, c$  leurs valeurs, on trouve que la première peut s'écrire

$$(5 \text{ bis}) \quad (n - 1) \sum \frac{m_i}{d_1^{n+2}} < 0,$$

ce qui entraîne  $n < 1$ .

La transformation des deux dernières inégalités exige

des calculs un peu longs, mais qui se présentent sous une forme parfaitement symétrique, et, d'ailleurs, les résultats sont fort simples.

On voit sans peine que l'on a, en posant  $D = \sum \frac{m_1}{d_2^{n+2}}$ ,

$$f^2 - bc = - \sum \frac{m_1 m_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2}{(d_1 d_2)^{n+2}} \\ + D \sum \frac{m_1}{d_1^{n+2}} [(n+1)(y_1^2 + z_1^2) - x_1^2],$$

$$g^2 - ca = - \sum \frac{m_1 m_2 (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2}{(d_1 d_2)^{n+2}} \\ + D \sum \frac{m_1}{d_1^{n+2}} [(n+1)(z_1^2 + x_1^2) - y_1^2],$$

$$h^2 - ab = - \sum \frac{m_1 m_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(d_1 d_2)^{n+2}} \\ + D \sum \frac{m_1}{d_1^{n+2}} [(n+1)(x_1^2 + y_1^2) - z_1^2].$$

En ajoutant membre à membre, on voit que l'inégalité (6) devient

$$\sum \frac{m_1 m_2}{(d_1 d_2)^{n+2}} [(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 \\ + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2] - (2n+1)D^2 > 0.$$

On voit que cette inégalité sera satisfaite si  $2n+1 < 0$  ou  $n \leq -\frac{1}{2}$ .

Cette inégalité (6) peut, d'ailleurs, s'écrire sous la forme beaucoup plus simple

$$(6 \text{ bis}) \quad \sum \frac{m_1 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1 d_2)^{n+2}} - (2n+1)D^2 > 0,$$

$(d_1 d_2)$  désignant l'angle des deux directions  $OA_1$  et  $OA_2$  qui joignent l'origine aux points  $A_1$  et  $A_2$ .

La transformation de la troisième inégalité est un peu plus longue; mais, si l'on ordonne le premier membre relativement aux puissances décroissantes de  $n+2$ , on

trouve qu'elle se réduit à

$$(7 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} & - (n+2)^3 \sum \frac{m_1 m_2 m_3}{(d_1 d_2 d_3)^{n+2}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 \\ & + (n+2)^2 D \sum \frac{m_1 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1 d_2)^{n+2}} - (n+2) D^3 + D^3 > 0. \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, on voit clairement que l'inégalité sera satisfaite si l'on prend des valeurs de  $n$  telles que

$$n+2 > 0.$$

On sait, d'ailleurs, que l'équilibre est stable pour  $n = -2$  ou pour  $n+1 = -1$ , car les forces attractives sont proportionnelles aux distances et tout se passe dans ce cas comme si l'on substituait aux points  $A_1, A_2, \dots$  le centre de gravité du système et comme si la masse de tous les points y était concentrée.

On peut, en transformant encore l'inégalité précédente, montrer qu'elle sera satisfaite toutes les fois que  $n+1$  sera plus petit que zéro ou égal à zéro.

Remarquons, d'abord, que  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$  représente

six fois le volume du tétraèdre qui a pour sommets l'origine et les trois points  $A_1, A_2, A_3$ ; soit  $V$  ce volume; remarquons, en outre, que  $d_3 d_1 d_2 \sin(d_1 d_2)$  représente une quantité plus grande que  $6V$ ; si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle formé par l'arête  $d_3$  ou  $OA_3$  avec le plan  $OA_1 A_2$  formé par les arêtes  $d_1$  et  $d_2$ , on aura

$$d_3 d_1 d_2 \sin(d_1 d_2) > \frac{6V}{\sin \alpha},$$



d'après cela, l'inégalité (7) pourra s'écrire

$$(n+2)^2 \sum \frac{m_1^2 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1^2 d_2)^{n+2}} - (n+1) D^3 \\ + (n+2)^2 \sum \frac{m_1 m_2 m_3}{(d_1 d_2 d_3)^{n+2}} \left[ \frac{6^2 V^2}{\sin^2 \alpha} - 6^2 V^2 (n+2) \right] > 0,$$

ou enfin

$$(7^{ter}) \left\{ \begin{aligned} & (n+2)^2 \sum \frac{m_1^2 m_2 \sin^2(d_1 d_2)}{(d_1^2 d_2)^{n+2}} - (n+1) D^3 \\ & + (n+2)^2 \sum \frac{m_1 m_2 m_3 \cdot 36 V^2}{(d_1 d_2 d_3)^{n+2} \sin^2 \alpha} [\cos^2 \alpha - (n+1) \sin \alpha] > 0. \end{aligned} \right.$$

Or, sous cette dernière forme, on voit bien clairement que l'inégalité sera satisfaite pour des valeurs de  $n$  telles que

$$n + 1 \geq 0.$$

On conclut de là que les trois inégalités (5), (6), (7) seront toujours satisfaites toutes les fois que  $n \leq -1$ , quels que soient les déplacements du point attiré autour de sa position d'équilibre, c'est-à-dire que l'équilibre sera stable d'une manière absolue. Si les trois inégalités ne sont pas satisfaites simultanément, l'équation du troisième degré en  $r^2$  aura au moins une racine positive;  $x, y, z$  s'exprimeront par des exponentielles et l'équilibre sera instable; c'est ce qui arriverait, par exemple, pour  $n = 1$ , c'est-à-dire dans le cas de l'attraction newtonienne.

On aurait pu traiter cette question d'une autre manière. On sait, en effet, que l'équilibre est stable si la fonction  $\varphi$  passe par un maximum, et que l'équilibre est instable si  $\varphi$  passe par un minimum. Or, il est facile de voir que l'on a, en négligeant les termes du troisième

degré en  $x, y, z$ ,

$$\frac{1}{a_1^n} = \frac{1}{d_1^n} \left[ 1 - \frac{n}{2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{d_1^2} + \frac{n(n+2)}{2} \frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{d_1^4} \right]^{-\frac{n}{2}},$$

d'où

$$\varphi = \sum \frac{m_1}{n d_1^n} + a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y.$$

La question se trouve donc ramenée à celle-ci : trouver les conditions pour que le polynôme homogène du second degré  $a x^2 + b y^2 + \dots$  soit constamment négatif. On est ainsi conduit aux trois inégalités (5), (6) et (7) déjà trouvées.

## SUR LES SYSTÈMES ARTICULÉS DE MM. PEAUCELLIER, HART ET KEMPE;

PAR M. V. LIGUINE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

1. Au point de vue de la Cinématique appliquée, pour avoir une connaissance complète d'un *mécanisme* donné, on doit, après avoir considéré la nature des trajectoires décrites par ses différents points, étudier encore les relations qui ont lieu entre les vitesses de ces points.

Depuis la belle découverte de M. Peaucellier, le nombre des mécanismes s'est accru de plusieurs appareils servant à transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne ou *vice versa*. Lorsqu'il s'agira d'une application pratique de ces appareils, il sera important, pour pouvoir les comparer et en choisir le plus convenable, de connaître la loi du mouvement transformé



$\frac{\alpha}{2}$ , car  $OP_1 = OA$ , et l'on trouve

$$(1) \quad s = a \tan \frac{\alpha}{2}.$$

C'est la relation qui lie l'espace rectiligne parcouru par le point P à l'angle décrit dans le même temps par la tige  $OP_1$ .

Pour obtenir le rapport des vitesses dans ces deux mouvements, il suffit de différentier l'équation (1) relativement au temps  $t$ ; on obtient

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Or,  $\frac{ds}{dt}$  est la vitesse  $v$  du mouvement rectiligne du point P et  $\frac{d\alpha}{dt}$  est la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation de la tige  $OP_1$  autour de O; donc

$$(2) \quad \frac{v}{\omega} = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

La rotation de  $OP_1$  étant uniforme, la vitesse du point P variera en raison inverse du carré du cosinus de l'angle  $\frac{\alpha}{2}$ ; la formule (2) montre que cette vitesse ne s'annule jamais.

Tirons  $Pm$  parallèlement à  $P_1O$ . Le triangle isocèle  $AmP$  donne

$$Am = \frac{AP}{2 \cos \frac{\alpha}{2}},$$



ou bien, puisque  $A\pi = a = AP \cos \frac{\alpha}{2}$ ,

$$Am = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Donc, eu égard à l'équation (2),

$$\frac{v}{\omega} = Am,$$

construction trouvée par M. d'Ocagne. De plus, en désignant respectivement par  $\Omega$  et  $\Omega'$  les vitesses angulaires de rotation des tiges AM et A'M autour du point A et en prolongeant les droites MP, PM' jusqu'à leurs intersections  $k$  et  $k'$  avec la ligne des centres AO, on a, comme l'a démontré M. d'Ocagne,

$$\frac{v}{\Omega} = Ak, \quad \frac{v}{\Omega'} = Ak'.$$

Donc

$$(3) \quad v = \omega . Am = \Omega . Ak = \Omega' . Ak'.$$

Telle est l'expression géométrique des relations entre les vitesses  $v$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  des divers mouvements à considérer dans le système de M. Peaucellier.

3. Dans l'appareil de M. Hart (*fig. 2*) la droite  $P\pi$  décrite par le point P est aussi perpendiculaire à la ligne des centres AO. En posant

$$A\pi = a, \quad P\pi = s, \quad \text{angle } P_1Om = \alpha,$$

le triangle rectangle  $A\pi P$  donne, comme précédemment, eu égard à ce que  $OP_1 = OA$ ,

$$(4) \quad s = a \tan \frac{\alpha}{2};$$

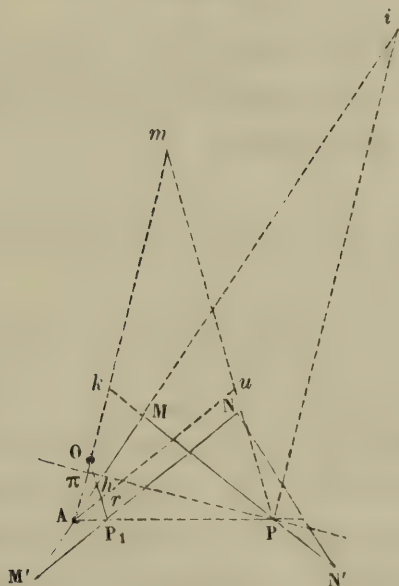
le rapport de la vitesse  $v$  de P à la vitesse angulaire  $\omega$

de  $OP_1$  est donc aussi

$$(5) \quad \frac{v}{\omega} = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

On voit que la loi du mouvement rectiligne dans

Fig. 2.



l'appareil Hart et le rapport de vitesses établi par ce système sont précisément les mêmes que dans l'appareil Peaucellier.

Outre les vitesses  $v$  et  $\omega$ , dans le mécanisme Hart, on n'a à considérer que la vitesse angulaire  $\Omega$  de la tige  $MM'$  autour du point  $A$ . Cherchons à construire graphiquement les rapports entre ces trois vitesses  $v$ ,  $\omega$  et  $\Omega$ .

Le point  $M$  se déplace sur la circonférence de rayon  $AM$  et le point décrit la droite  $P\pi$ ; par conséquent, le centre instantané de rotation relatif au déplacement de la tige  $MN'$  se trouve au point d'intersection  $i$  de  $AM$  prolongée avec la perpendiculaire  $Pi$  à  $P\pi$ , et l'on a, en désignant par  $v'$

la vitesse du point M,

$$\frac{v}{v'} = \frac{Pi}{Mi}.$$

Or,  $v' = \Omega \cdot AM$ ; donc

$$\frac{v}{\Omega} = \frac{Pi \cdot AM}{Mi}.$$

Prolongeons PM et AO jusqu'à leur rencontre en  $k$ . Les droites  $Ak$ ,  $Pi$  étant parallèles, la similitude des triangles  $MPi$ ,  $MkA$  donne

$$\frac{Pi}{Mi} = \frac{Ak}{AM}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Pi \cdot AM}{Mi} = Ak;$$

donc

$$(6) \quad \frac{v}{\Omega} = Ak.$$

Pour construire le rapport des vitesses  $v$  et  $\omega$ , observons que les points  $P_1$  et  $M'$  décrivent respectivement les circonférences de rayons  $OP_1$  et  $AM'$ ; le centre instantané relatif au déplacement de la tige  $M'N$  se trouve donc au point  $h$  et l'on a, en désignant la vitesse du point  $P_1$  par  $v''$  et celle du point  $M'$  par  $v'''$ ,

$$\frac{v'''}{v''} = \frac{M'h}{P_1h}.$$

Mais  $v''' = \Omega \cdot AM'$ ,  $v'' = \omega \cdot OP_1$ ; donc

$$\frac{\Omega \cdot AM'}{\omega \cdot OP_1} = \frac{M'h}{P_1h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{M'h \cdot OP_1}{P_1h \cdot AM'}.$$

Multiplions cette équation et l'équation (6) membre à membre; il vient

$$\frac{v}{\omega} = \frac{M'h \cdot OP_1 \cdot Ak}{P_1h \cdot AM'}.$$

Tirons  $Ar$  parallèlement à  $M'P_1$  ; on a

$$\frac{M'h}{AM'} = \frac{P_1h}{P_1r},$$

et

$$\frac{c}{\omega} = \frac{OP_1 \cdot Ak}{P_1r}.$$

Menons la droite  $Pm$  parallèle à  $P_1O$  et prolongeons  $Ar$  jusqu'à sa rencontre avec  $Pm$  en  $u$ .

Les triangles  $PAk$ ,  $APu$  sont égaux, comme ayant un côté  $AP$  commun et les angles  $PAk$ ,  $kPA$  respectivement égaux aux angles  $APu$ ,  $PAu$  ; donc  $Ak = Pu$  et

$$\frac{c}{\omega} = \frac{OP_1 \cdot Pu}{P_1r}.$$

Les triangles semblables  $PAu$ ,  $P_1Ar$  donnent

$$\frac{Pu}{P_1r} = \frac{AP}{AP_1},$$

et les triangles semblables  $PAm$ ,  $P_1AO$

$$\frac{AP}{AP_1} = \frac{Pm}{OP_1},$$

d'où, eu égard à ce que  $Pm = Am$ ,

$$\frac{Pu}{P_1r} = \frac{Am}{OP_1};$$

donc

$$(7) \quad c = \omega \cdot \frac{Am}{OP_1} = \Omega \cdot Ak.$$

En réunissant les équations (6) et (7), on trouve pour l'appareil Hart

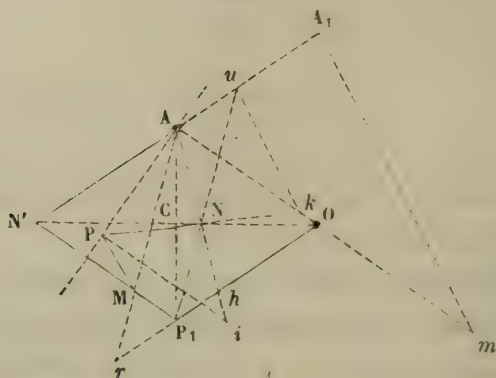
$$(8) \quad c = \omega \cdot Am = \Omega \cdot Ak.$$

4. Passons, enfin, au système de M. Kempe, représenté



par la *fig. 3*. La droite décrite par le point P est toujours

*Fig. 3.*



perpendiculaire à la ligne des centres AO, mais elle passe maintenant par le point fixe A. Posons

$$\begin{aligned} AN' = P_1N' = P_1O = AO &= l, \\ AN = PN = P_1N &= l_1, \quad AP = s, \\ \text{angle } AOP_1 &= \alpha, \quad \text{angle } ANP_1 = \beta. \end{aligned}$$

Le triangle isocèle ANP donne

$$s = 2 l_1 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = 2 l_1 \left( \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

D'autre part, on trouve, en considérant les triangles rectangles ACN, ACO,

$$AC = l_1 \sin \frac{\beta}{2} = l \sin \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{l}{l_1} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_1^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

En portant ces valeurs de  $\sin \frac{\beta}{2}$  et  $\cos \frac{\beta}{2}$  dans l'expression de  $s$ , on obtient, après quelques réductions, la relation cherchée entre  $s$  et  $\alpha$  pour l'appareil Kempe,

$$(9) \quad s = l \sin \alpha = 2 l_1 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_1^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Pour avoir le rapport de la vitesse du point P à la vitesse angulaire  $\omega$  de la tige  $OP_1$ , mettons l'équation (9) sous la forme

$$l \sin \alpha - s = 2 l_1 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_1^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

et élevons les deux membres au carré; il vient

$$l^2 \sin^2 \alpha - 2 l s \sin \alpha + s^2 = 4 l_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 l^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

Différentions cette équation par rapport au temps  $t$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} (l \sin \alpha - s) \\ = \frac{d\alpha}{dt} \left( l^2 \sin \alpha \cos \alpha - l s \cos \alpha - l_1^2 \sin \alpha + 2 l^2 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

ou bien, puisque  $\frac{ds}{dt} = v$ ,  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ ,

$$\frac{v}{\omega} = \frac{l \cos \alpha (l \sin \alpha - s) + \sin \alpha (2 l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l_1^2)}{l \sin \alpha - s},$$

ou enfin, eu égard à l'équation (9),

$$(10) \quad \frac{v}{\omega} = l \cos \alpha + l_1 \cos \frac{\alpha}{2} \frac{2 \frac{l^2}{l_1^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{l_1^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Occupons-nous maintenant de l'expression géométrique des rapports entre les vitesses  $v$ ,  $\omega$  et la vitesse angulaire  $\Omega$  de la tige  $AN$  autour du point A; ces trois vitesses sont les seules qu'il y ait lieu de considérer dans l'appareil Kempe, la vitesse angulaire de la tige  $AN$  autour du point A étant évidemment égale à celle de  $OP_1$  autour de O.

Le point P décrivant la droite AP et le point N la

circonférence de rayon  $AN$ , le centre instantané relatif au déplacement de la tige  $PN$  se trouve au point d'intersection  $i$  de la perpendiculaire  $Pi$  à  $AP$  avec la ligne  $AN$  prolongée. Donc, en désignant la vitesse du point  $N$  par  $v'$ ,

$$\frac{v}{v'} = \frac{Pi}{Ni},$$

ou, comme  $v' = \Omega \cdot AN$ ,

$$\frac{v}{\Omega} = \frac{Pi \cdot AN}{Ni}.$$

Mais, si l'on prolonge  $PN$  jusqu'à la rencontre de  $k$  avec  $AO$ , on obtient deux triangles isoscèles égaux  $PNi$ ,  $ANk$ , dans lesquels  $AN = Ni$ ,  $Pi = Ak$ ; il vient donc

$$(11) \quad \frac{v}{\Omega} = Ak.$$

Il nous reste à construire le rapport  $\frac{v'}{\omega}$ . A cet effet, considérons le déplacement de la tige  $NP_1$ ; ses deux extrémités se meuvent sur les deux circonférences de rayons  $AN$  et  $OP_1$ ; le centre instantané du déplacement considéré se trouve donc au point  $h$  et l'on a, en désignant par  $v''$  la vitesse du point  $P_1$ ,

$$\frac{v'}{v''} = \frac{Nh}{P_1h}.$$

Or  $v' = \Omega \cdot AN$ ,  $v'' = \omega \cdot OP_1$ ; l'égalité précédente devient

$$\frac{\Omega \cdot AN}{\omega \cdot OP_1} = \frac{Nh}{P_1h} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{Nh \cdot OP_1}{P_1h \cdot AN}.$$

Multiplions cette équation et l'équation (11) membre à membre; on trouve

$$\frac{v}{\omega} = \frac{Nh \cdot OP_1 \cdot Ak}{P_1h \cdot AN}.$$

Tirons  $Ar$  parallèlement à  $NP_1$ ; cette droite coupera le prolongement de  $OP_1$  en un point  $r$  et l'on aura

$$\frac{Nh}{P_1h} = \frac{AN}{P_1r}.$$

Donc

$$\frac{v}{\omega} = \frac{OP_1 \cdot Ak}{P_1r}.$$

Sur le prolongement de  $N'A$ , portons  $AA_1 = AN'$ ; la droite  $P_1N$  prolongée rencontrera  $N'A_1$  en  $u$ ; joignons  $uk$  et menons la droite  $A_1m$  parallèle à  $uk$ ; on a

$$\frac{AA_1}{Au} = \frac{Am}{Ak},$$

ou, comme  $AA_1 = OP_1$ ,  $Au = P_1r$ ,

$$\frac{OP_1}{P_1r} = \frac{Am}{Ak}, \quad \text{d'où} \quad \frac{OP_1 \cdot Ak}{P_1r} = Am,$$

et il vient

$$(12) \quad \frac{v}{\omega} = Am.$$

On a donc, d'après les équations (11) et (12), pour l'appareil Kempe, les relations

$$(13) \quad v = \omega \cdot Am = \Omega \cdot Ak.$$

## NOTE SUR LES PARABOLOIDES DU SECOND ORDRE OSULATEURS AUX SURFACES;

PAR M. A. PICART.

1. L'équation d'une surface peut toujours se mettre sous la forme

$$(1) \left\{ \begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2] \\ &+ \frac{1}{1.2.3} [u(X - x)^3 + 3v(X - x)^2(Y - y) \\ &\quad + 3uv(X - x)(Y - y)^2 + w(Y - y)^3] + \dots, \end{aligned} \right.$$



$X, Y, Z$  désignant les coordonnées variables,  $x, y, z$  les coordonnées d'un point particulier de la surface,  $p, q, r, s, t, u, v, w, \dots$  les valeurs des coefficients différentiels de divers ordres relatives à ce point.

2. Si l'on borne le développement (1) aux termes du premier degré, on a l'équation du plan tangent au point  $(x, y, z)$ ; si on le limite aux termes du second degré, on a l'équation d'un paraboloïde osculateur du second ordre; aux termes du troisième degré, on a un paraboloïde osculateur du troisième ordre, et ainsi de suite.

3. L'intersection de deux plans tangents infiniment voisins et la ligne qui joint leurs points de contact  $(x, y, z)$  et  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  sont les directions de deux diamètres conjugués d'une courbe du second degré située dans le plan tangent au point  $(x, y, z)$  et ayant pour projection sur le plan des  $xy$

$$(2) \quad r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = \text{const.};$$

c'est l'*indicatrice* de Dupin.

En effet, on obtient l'équation de la projection sur le plan des  $xy$  de l'intersection des plans tangents aux deux points infiniment voisins

$$(x, y, z), \quad (x + dx, y + dy, z + dz)$$

de la surface, en différentiant l'équation du plan tangent relativement à  $x, y, z$ , savoir

$$dp(X - x) + dq(Y - y) = 0,$$

et les deux directions

$$\frac{dp}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}$$

satisfont à la condition des directions conjuguées

$$-t \frac{dp}{dq} \frac{dy}{dx} + s \left( \frac{dy}{dx} - \frac{dp}{dq} \right) + r = 0,$$

qui n'est autre que l'identité

$$\frac{dp}{dq} = \frac{r dx + s dy}{s dx + t dy},$$

dans l'équation (2).

Cette équation, lorsque la constante est supposée infiniment petite, représente la projection sur le plan des  $xy$  de l'intersection de la surface par le plan tangent, transporté infiniment peu parallèlement à lui-même.

4. Si l'on considère de même les paraboloides osculateurs du second ordre en deux points infiniment voisins  $(x, y, z)$ ,  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , on reconnaît facilement qu'ils se coupent suivant deux courbes planes ayant pour projection sur le plan des  $xy$

$$(3) \quad dr(X - x)^2 + 2ds(X - x)(Y - y) + dt(Y - y)^2 = 0,$$

et les tangentes à ces deux courbes en leur point d'intersection  $(x, y, z)$  constituent le diamètre conjugué de la ligne des contacts par rapport à une courbe du troisième degré située dans le plan tangent en  $(x, y, z)$ , et ayant pour projection sur le plan des  $xy$

$$(4) \quad \begin{cases} u(X - x)^3 + 3r(X - x)^2(Y - y) \\ + 3u(X - x)(Y - y)^2 + w(Y - y)^3 = \text{const.} \end{cases}$$

Cette équation, lorsque la constante est infiniment petite, représente la projection sur le plan des  $xy$  de l'intersection de la surface par le paraboloïde osculateur transporté infiniment peu dans le sens de l'axe des  $z$ .

De plus, ces tangentes d'intersection sont toujours,

quel que soit le déplacement du point de contact, deux diamètres conjugués d'une courbe du second degré située dans le plan tangent et ayant pour projection sur le plan des  $xy$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} (uu - v^2)(X - x)^2 + (uv - vu)(X - x)(Y - y) \\ + (vw - w^2)(Y - y)^2 = \text{const.} \end{aligned} \right.$$

5. On pourrait étendre ces considérations aux paraboloides osculateurs d'ordre plus élevé et l'on arriverait à des conclusions analogues.

6. Mais ce que nous voulons étudier surtout, c'est l'enveloppe des paraboloides osculateurs du second ordre qui ont leurs points de contact sur une ligne donnée.

On obtient l'équation de cette enveloppe en éliminant  $x$  entre les équations

$$(6) \left\{ \begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \\ dr(X - x)^2 + 2ds(X - x)(Y - y) + dt(Y - y)^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles  $z$  est une fonction de  $x$  et  $y$  donnée par l'équation de la surface, et  $y$  une fonction de  $x$  dépendant de la ligne que l'on considère. Quant à la caractéristique de cette enveloppe, elle est représentée par ces deux mêmes équations où l'on regarde  $x$  comme un paramètre constant. Elle se compose généralement de deux courbes planes distinctes, dont l'équation (3) représente la projection sur le plan des  $xy$ .

7. Supposons que, le long de la courbe qui dirige le mouvement de l'enveloppée, il existe entre les différen-

tielles  $dr, ds, dt$  la relation

$$(7) \quad ds^2 = dr dt;$$

alors les deux branches de la caractéristique se confondent en une seule, et l'enveloppée a avec l'enveloppe, le long de cette courbe unique, un contact du second ordre.

En chaque point de la surface il y a deux directions pour lesquelles la relation (7) est satisfaite, car cette relation peut se mettre sous la forme

$$\left( v + u \frac{dy}{dx} \right)^2 = \left( u + v \frac{dy}{dx} \right) \left( u + w \frac{dy}{dx} \right)$$

ou

$$(8) \quad (vw - u^2) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 (uiv - vuu) \frac{dy}{dy} + uu - v^2 = 0.$$

On voit que ce sont les directions asymptotiques de la courbe (5), comme on devait s'y attendre. Il existe donc sur la surface un double système de lignes (réelles ou imaginaires) le long desquelles l'enveloppe des paraboloïdes osculateurs a un contact du second ordre avec ses enveloppées. L'enveloppe est alors définie par les deux équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \\ \quad + \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \\ \left( u + v \frac{dy}{dx} \right) (X - x) + \left( v + u \frac{dy}{dx} \right) (Y - y) = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles il faut ajouter la condition (8).

8. Remarquons maintenant, et c'est là l'objet principal de cette Note, que les coefficients différentiels du second ordre R, S, T relatifs à l'enveloppe, étant les



mêmes, le long de chaque caractéristique, que les coefficients  $r, s, t$  relatifs à l'enveloppée correspondante, restent constants le long d'une même caractéristique, et que, par suite, les rapports des variations  $dR, dS, dT$  que subissent ces coefficients pour un déplacement infiniment petit effectué sur l'enveloppe, à partir d'un point, sont indépendants de la direction de ce déplacement. Or on a

$$\begin{aligned} dR &= U dX + V dY, \\ dS &= V dX + U dY, \\ dT &= U dX + W dY; \end{aligned}$$

donc, sur toute l'étendue de l'enveloppe, les rapports

$$\frac{U}{V}, \frac{V}{U}, \frac{U}{W}$$

doivent être égaux, c'est-à-dire que l'équation finie de l'enveloppe vérifie les équations aux dérivées partielles du troisième ordre

$$\frac{U}{V} = \frac{V}{U} = \frac{U}{W}$$

ou

$$V^2 = U U^2, \quad U U^2 = V W, \quad U W = V U U,$$

dont la dernière est une conséquence des deux premières.

Nous avons donc ainsi une intégrale commune aux deux équations

$$(10) \quad V^2 = U U^2, \quad U U^2 = V W.$$

Si l'on regarde  $z$  comme une fonction arbitraire  $F$  de  $x$  et  $y$ , et  $y$  comme une fonction  $f$  de  $x$  ayant pour dérivée  $y'$ , et qu'on donne à  $p, q, r, s, t, u, v, w$  leur signification bien connue, cette intégrale commune provient de l'élimination de  $x$  entre les équations

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \\ (u + v y')(X - x) + (v + w y')(Y - y) &= 0. \end{aligned} \right.$$

avec la condition

$$(vw - u^2)y'^2 + (uw - vu)y' + uu - v^2 = 0,$$

ou, en tirant de la seconde de ces équations la valeur de  $y'$  pour la porter dans la troisième, de l'élimination de  $x$  entre les deux équations

$$(11') \left\{ \begin{aligned} Z - z &= p(X - x) + q(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \\ (uu - v^2)(X - x)^2 &+ (uw - vu)(X - x)(Y - y) \\ &+ (vw - u^2)(Y - y)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

9. De là le mode de génération suivant des surfaces définies par les équations (10) :

*Si l'on prend une surface quelconque*

$$z = F(x, y)$$

*et qu'on détermine sur cette surface le double système de lignes*

$$y = f(x)$$

*défini par l'équation différentielle*

$$ds^2 = dr dt,$$

*les enveloppes des paraboloïdes osculateurs du second ordre menés le long de ces différentes lignes sont autant de surfaces satisfaisant aux deux équations*

$$V^2 = UUU, \quad UU^2 = VW.$$

10. Il est du reste facile d'obtenir l'intégrale générale de l'une de ces équations, par exemple  $V^2 = UUU$ .

On voit sans peine que l'intégrale première est

$$(12) \quad r = \varphi(s),$$

$\varphi$  désignant une fonction arbitraire, et que cette dernière équation a pour intégrale

$$(13) \quad p = \psi(x) + x\varphi(x) + \alpha y,$$

$\psi$  étant la caractéristique d'une nouvelle fonction arbitraire, et  $\alpha$  une fonction de  $x$  et  $y$  définie par l'équation

$$(14) \quad \psi'(x) + x\varphi'(x) + y = 0.$$

Il reste donc à intégrer le système des équations (13) et (14).

L'équation (13) donne

$$z = \int (\psi + x\varphi + \alpha y) dx + \theta(y)$$

ou, en intégrant par parties,

$$(15) \quad z = x(\psi + x\varphi + \alpha y) - \int x\varphi dx + \theta(y),$$

$\theta$  désignant une troisième fonction arbitraire.

Il faut remarquer que l'intégrale est prise par rapport à  $x$ ,  $y$  étant traité comme une constante.

Substituons à  $x$  la variable  $\alpha$ . L'équation (14) nous fournit la valeur de  $x$  en fonction de  $\alpha$ , savoir

$$x = -\frac{y + \psi'}{\varphi'},$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{(y + \psi')\varphi'' - \varphi'\psi''}{\varphi'^2} d\alpha.$$

Portant ces valeurs de  $x$  et  $dx$  dans (15) sous le signe  $\int$ , on obtient

$$z = x(\psi + x\varphi + \alpha y) - \int \frac{(y + \psi')[(y + \psi')\varphi'' - \varphi'\psi'']}{\varphi'^3} \varphi' d\alpha + \theta(y).$$

ou

$$(16) \left\{ \begin{aligned} z &= x(\psi + x\varphi + xy) \\ &+ y^2 \int \frac{\varphi_1 \varphi_1''}{\varphi_1'^3} dx + y \int \frac{2\psi' \varphi_1'' - \varphi_1' \psi''}{\varphi_1'^3} \varphi_1 dx \\ &+ \int \frac{\psi'(\psi' \varphi_1'' - \varphi_1' \psi'')}{\varphi_1'^3} \varphi_1 dx + \theta(y). \end{aligned} \right.$$

Cette équation, jointe à la relation (14), constitue l'intégrale générale de l'équation du troisième ordre

$$V^2 = UUU$$

ou de l'équation du second ordre équivalente

$$r = \varphi(s).$$

On formerait de même l'intégrale de l'équation

$$UU^2 = VW \quad \text{ou} \quad t = \varphi(s).$$

Remarquons que, lorsque  $\theta(y)$  est une fonction du second degré en  $y$ , la surface représentée par les équations (14) et (16) peut être regardée comme engendrée par le déplacement d'une courbe du second ordre.

## SOMMATION D'UNE SÉRIE REMARQUABLE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève de l'École Polytechnique.

Dans un Mémoire inséré aux *Annales de Gergonne* <sup>(1)</sup>, de Stainville considère une série remarquable dont il étudie les propriétés et fait diverses applications.

Gergonne <sup>(2)</sup>, puis Ampère <sup>(3)</sup> sont revenus sur

<sup>(1)</sup> Tome IX, page 229.

<sup>(2)</sup> Tome IX, pages 261 et 270.

<sup>(3)</sup> Tome XV, page 369.



cette série, simplifiant les démonstrations du premier auteur, poussant plus loin les conséquences de son théorème; mais aucun de ces géomètres ne s'est occupé de la sommation de cette série; cette recherche fait l'objet de la présente Note.

La série de Stainville est

$$1 + a \frac{z}{1} + a(a+k) \frac{z^2}{1.2} + \dots \\ + a(a+k) \dots [a+(n-1)k] \frac{z^n}{1.2 \dots n} + \dots,$$

prise pour les valeurs de  $z < \frac{1}{k}$ , et que je représenterai par  $S(a, k)$ .

La propriété fondamentale de cette série, démontrée dans les Mémoires cités, consiste en ce que

$$S(a+b, k) = S(a, k) S(b, k).$$

Cela posé, dérivons  $S(a, k)$  par rapport à  $z$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dS(a, k)}{dz} &= a + a(a+k) \frac{z}{1} + \dots \\ &\quad + a(a+k) \dots [a+(n-1)k] \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \dots \\ &= a \left[ 1 + (a+k) \frac{z}{1} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (a+k) \dots [a+(n-1)k] \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \dots \right] \\ &= aS(a+k, k), \end{aligned}$$

ou, d'après la propriété fondamentale,

$$\frac{dS(a, k)}{dz} = aS(a, k) S(k, k).$$

Mais

$$S(k, k) = 1 + kz + k^2 z^2 + \dots + k^n z^n + \dots$$

Or

$$z < \frac{1}{k}, \quad \text{ou} \quad kz < 1.$$

Donc,

$$S(k, k) = \frac{1}{1 - kz};$$

par suite,

$$\frac{dS(a, k)}{dz} = \frac{a}{1 - kz} S(a, k),$$

ou

$$\frac{dS(a, k)}{S(a, k)} = a \frac{dz}{(1 - kz)}.$$

Intégrons alors, en remarquant que, pour  $z = 0$ ,  $S(a, k) = 0$ ; nous avons

$$\log S(a, k) = - \frac{a}{k} \log (1 - kz),$$

et, en remontant des logarithmes aux nombres,

$$S(a, k) = (1 - kz)^{-\frac{a}{k}}.$$

## SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DE LA FORME

$$(x^p - a^p) \psi(x) = 0;$$

PAR LE P. BERLOTY.

THÉORÈME. — Soit

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$

$A_0, A_1, \dots$  étant des constantes et  $m$  un entier. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$F(x) = 0$$

admette les  $p$  racines de l'équation

$$x^p - a^p = 0$$

est que ces  $p$  racines appartiennent à chacune des équations



formée  $f_i(x) = 0$ ,

$$f_i(x) = \Lambda_0 x^m + \alpha_i \Lambda_1 x^{m-1} + \alpha_i^2 \Lambda_2 x^{m-2} + \dots \\ + \alpha_i^{p-1} \Lambda_{p-1} x^{m-p+1} + \Lambda_p x^{m-p} \\ + \alpha_i \Lambda_{p+1} x^{m-p-1} + \dots = 0,$$

ou bien, en remarquant que la première colonne n'est autre que  $\varphi_1(x)$ , la deuxième que  $\varphi_2(x)$ , etc.,

$$(3) \quad f_i = \varphi_1 + \alpha_i \varphi_2 + \alpha_i^2 \varphi_3 + \dots + \alpha_i^{p-1} \varphi_p = 0.$$

On a donc aussi, en faisant la somme des équations semblables, multipliées respectivement par la puissance  $p-j$  de la quantité  $\alpha$  correspondante ( $j$  étant un entier pris entre 0 et  $p-1$ ),

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \alpha_i^{p-j} f_i = \varphi_1 \Sigma \alpha_i^{p-j} + \varphi_2 \Sigma \alpha_i^{p-j+1} + \dots \\ \quad \quad \quad + \varphi_{j+1} \Sigma \alpha_i^p + \dots = 0, \end{array} \right.$$

$i$  prenant sous les divers signes  $\Sigma$  toutes les valeurs entières de 1 à  $p$ .

D'ailleurs, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, on a, suivant que l'exposant  $\mu$  est ou non un multiple de  $p$ ,

$$\Sigma \alpha_i^\mu = p, \quad \text{ou} \quad \Sigma \alpha_i^\mu = 0.$$

Si donc on remarque que  $f_i(x)$  contient les seules puissances 0, 1, 2, ... ( $p-1$ ) de  $\alpha_i$ , on voit sans peine que, dans l'équation (4), tous les termes s'évanouissent, sauf le seul terme  $\varphi_{j+1} \Sigma \alpha_i^p$ ; d'où l'on conclut que, si toutes les équations (2) sont satisfaites par les racines de l'équation  $x^p - a^p = 0$ , il en sera de même de l'équation

$$\varphi_{j+1} = 0.$$

Or  $j$  est quelconque entre 0 et  $p-1$ ; donc les  $p$  équations (1)

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_p = 0$$



admettent au premier membre  $x^p - a^p$  comme facteur. A leur tour, si les équations (1) sont satisfaites par les racines de l'équation  $x^p - a^p = 0$ , les équations (2) le seront aussi; car chacune de ces dernières, d'après la formule (3), n'est autre qu'une composition linéaire et homogène des polynômes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ .

Ainsi se trouve établi le théorème proposé. On peut l'énoncer dans les termes suivants :

*La condition nécessaire et suffisante pour que  $F(x)$  soit de la forme  $(x^p - a^p)\psi(x)$  est que les polynômes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  soient de la même forme.*

---

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(DEUXIÈME SESSION, 1879).

SOLUTION DE M. J. AUZELLE.

Élève du Lycée de Moulins.

---

On donne un carré  $PQP'Q'$ , dont la demi-diagonale  $OP = OQ = n$ .

1° On demande d'écrire l'équation générale des coniques tangentes aux quatre côtés de ce carré, en distinguant les cas où ce sont des ellipses, des hyperboles ayant leurs sommets sur  $OPx$ , des hyperboles ayant leurs sommets sur  $OPy$ , ou enfin des paraboles.

2° On considère l'une quelconque des ellipses inscrites dans le carré; sur son demi-axe  $OA$ , comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle  $OAs$ , dont le côté  $As$  a une longueur fixe donnée  $As = K$ ; sur la direction de l'axe  $OA$ , on prend une longueur  $OS = Os$  et on construit une hyperbole équilatère ayant son centre en  $O$  et l'un de ses sommets en  $S$ ; cette hyper-

bole coupe l'ellipse considérée au point M. On demande d'écrire l'équation lieu des points M.

3° On discutera la nature et la position du lieu, suivant la grandeur de la ligne donnée K et suivant que OA est le demi-grand axe ou le demi-petit axe de l'ellipse considérée.

1° Les diagonales d'un parallélogramme circonscrit à une conique sont des diamètres conjugués; il en résulte que les droites PP' et QQ' sont des axes. Soit alors l'équation cherchée

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

En exprimant que P'Q est tangente à ces coniques et prenant  $A = 1$ , on obtient la relation

$$n^2 - (C + 1)(n^2 + F) = 0;$$

par suite l'équation demandée est

$$(1) \quad x^2 + Cy^2 = \frac{Cn^2}{C+1}.$$

On peut avoir des ellipses, des hyperboles ou même des courbes du genre parabole. Si les hyperboles ont leurs sommets sur OPx, leur intersection avec OQy doit donner deux valeurs imaginaires de y, ou deux valeurs imaginaires de x, si ces sommets sont sur OQy. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve les résultats suivants :

$C > 0$  ellipses,

$C < 0$  hyperboles  $\left\{ \begin{array}{l} C < -1 \text{ sommets sur OP}x, \\ C > -1 \quad \quad \quad \text{»} \quad \quad \quad \text{OQ}y, \end{array} \right.$

$C = 0$  droites doubles.

2° et 3° L'équation (1) s'écrit

$$\frac{x^2}{\frac{Cn^2}{C+1}} + \frac{y^2}{\frac{n^2}{C+1}} = 1.$$

Si nous considérons d'abord le triangle rectangle construit sur OA comme hypoténuse, l'hyperbole équilatère dont la longueur de l'axe est  $\frac{Cn^2}{C+1} - K^2$  a évidemment pour équation  $x^2 - y^2 = \frac{Cn^2}{C+1} - K^2$ . L'élimination de C entre cette équation et l'équation de l'ellipse donnera le lieu.

On obtient facilement  $C = \frac{K^2 - y^2}{y^2}$  et la substitution donne

$$K^2(x^2 - y^2 + K^2) = n^2(K^2 - y^2).$$

La nature du lieu dépend du signe de  $K^2(K^2 - n^2)$ .

Ce produit est toujours négatif, car, si l'on supposait  $K > n$ , le triangle rectangle OAs serait impossible.

Le lieu est donc toujours une ellipse.

Considérons maintenant le triangle rectangle construit sur le petit axe de l'ellipse comme hypoténuse.

L'hyperbole équilatère devient

$$x^2 - y^2 = \frac{n^2}{C+1} - K^2.$$

En éliminant toujours C, on a  $C+1$  et par suite C tiré de cette équation; en substituant dans l'équation de l'ellipse, il vient

$$(x^2 - y^2 + K^2)[2(n^2 - y^2) + K^2 - n^2] + n^2 y^2 = 0,$$

qui est l'équation du lieu.

Posons, pour le construire,  $x^2 - y^2 + K^2 = t$  :

$$y^2 = \frac{t(K^2 + n^2 - 2t)}{n^2}, \quad x^2 = \frac{t(K^2 + 2n^2 - 2t) - K^2 n^2}{n^2}.$$

Le dénominateur étant une constante, il n'y a qu'à chercher entre quelles limites doit varier  $t$  pour que les numérateurs soient en même temps positifs.

Le coefficient du terme en  $t^2$  étant négatif dans les deux numérateurs,  $t$  doit être compris entre les racines, qui sont par ordre de grandeur  $0, \frac{K^2}{2}, \frac{K^2 + n^2}{2}, n^2$ ;  $t$  doit donc être compris entre  $\frac{K^2}{2}$  et  $\frac{K^2 + n^2}{2}$ .

La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, il suffit de la construire dans le premier quadrant. Pour avoir le sens des variations éprouvées par  $x$  et  $y$ , il suffit de considérer la dérivée du numérateur de  $y^2$  et celle du numérateur de  $x^2$ ; alors la discussion, qui n'offre plus de difficulté, peut être résumée dans le tableau ci-dessous.

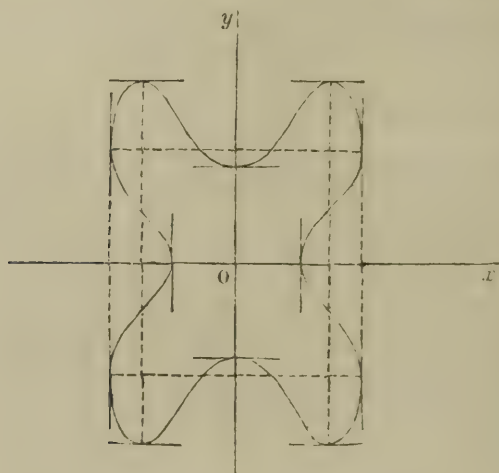
$t.$	$x'.$	$x.$	$y'.$	$y.$
$\frac{K^2}{2}$		0		$\frac{K\sqrt{2}}{2}$
croît	+	croît	+	croît
$\frac{K^2 + n^2}{4}$		$\sqrt{\phantom{x}}$	0	max. $\frac{K^2 + n^2}{2n\sqrt{2}}$
croît	+	croît	—	décroît
$\frac{K^2 + 2n^2}{4}$	0	max. $\frac{2n^2 - K^2}{2n\sqrt{2}}$	—	décroît
croît	—	décroît	—	décroît
$\frac{K^2 + n^2}{2}$		$\sqrt{\frac{n^2 - K^2}{2}}$		0

On peut remarquer que  $t$  ne pouvant être infini, et par suite, ni  $x$  ni  $y$ , il n'y a pas de branches infinies.

La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, les tangentes aux points pour lesquels on a  $x = 0$  ou  $y = 0$  sont perpendiculaires soit à  $Oy$  soit à  $Ox$ ; comme les maximums correspondent aussi à des tangentes parallèles aux axes, on voit que l'on a en tout douze tangentes.



En tenant compte des grandeurs relatives des valeurs



de  $x$  et de  $y$  qui correspondent aux points du lieu, on a une courbe dont la forme est celle indiquée ci-dessus.

### SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1880;

Par M. J. BOUDÈNES, au lycée d'Avignon.

*On donne un ellipsoïde, et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur ; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q.*

*1° Le sommet du cône se déplaçant dans un plan donné P, trouver le lieu décrit par le pôle du plan Q par rapport à l'ellipsoïde.*

*2° Ce lieu est une surface du second degré  $\Sigma$  ; on demande de déterminer les positions du plan P pour lesquelles le cône asymptote de cette surface  $\Sigma$  a trois*

*génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.*

3° *Le plan P se déplaçant de façon que la surface  $\Sigma$  satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces  $\Sigma$  par un plan fixe R perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.*

4° *Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan R se déplace parallèlement à lui-même.*

1° Le plan polaire d'un point  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , par rapport à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0.$$

Toute surface du second degré passant par l'intersection de ce plan, du plan des  $xy$  et de l'ellipsoïde, est comprise dans l'équation

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \\ + 2\lambda z \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right) = 0,$$

et cette équation représentera un cône, si l'on a

$$f'_x = \frac{x}{a^2} + \frac{\lambda \alpha z}{a^2} = 0,$$

$$f'_y = \frac{y}{b^2} + \frac{\lambda \beta z}{b^2} = 0,$$

$$f'_z = \frac{z}{c^2} + \lambda \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \right) + \frac{\lambda \gamma z}{c^2} = 0,$$

$$f'_t = -1 - \lambda z = 0.$$

Les coordonnées  $(x, y, z)$  du sommet du cône satisfont de plus à l'équation du plan P

$$lx + my + nz = p,$$

qui, jointe aux quatre équations précédentes, nous donne, par élimination de  $\lambda, x, y, z$ , le lieu du pôle  $(\alpha, \beta, \gamma)$  du plan Q.

On trouve ainsi l'équation

$$\frac{(lx + m\beta + n\gamma - p)^2}{n^2 c^2} - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 \right) = 0,$$

qui représente une surface  $\Sigma$  du second degré circonscrite à l'ellipsoïde le long de sa courbe d'intersection avec le plan P.

2° Le cône asymptote de cette surface, étant parallèle au cône

$$\frac{(lx + m\beta + n\gamma)^2}{n^2 c^2} - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) = 0,$$

aura trois génératrices parallèles aux axes de l'ellipsoïde, lorsque ce dernier contiendra les trois axes de symétrie, ce qui exige que l'on ait

$$\pm \frac{l}{\frac{1}{a}} = \pm \frac{m}{\frac{1}{b}} = \pm \frac{n}{\frac{1}{c}};$$

en sorte que les plans P, dans ces cas particuliers, auront pour équations

$$\pm \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} = k = 0$$

Donc la surface  $\Sigma$  aura trois génératrices parallèles aux axes de l'ellipsoïde, quand le plan P sera parallèle à l'une des huit faces, parallèles deux à deux, de l'octaèdre régulier qui a pour sommets les six sommets de l'ellipsoïde.

3° Considérons l'un des huit plans

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - k = 0.$$

La surface  $\Sigma$  correspondant à ce plan devient

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - k\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Un plan

$$z = \rho$$

perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde coupe cette surface suivant une conique dont le foyer aura pour projection, sur le plan  $xy$ , le foyer de la conique projection.

On sait que le foyer de la courbe projection est défini par les équations

$$\left[\frac{x}{ab} - \frac{1}{b}\left(k - \frac{\rho}{c}\right)\right]^2 = \left[\frac{y}{ab} - \frac{1}{a}\left(k - \frac{\rho}{c}\right)\right]^2,$$

et

$$\frac{\rho^2}{c^2} - 1 - \frac{xy}{ab} + \left(k - \frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

La première se décompose en

$$x + y - \left(k - \frac{\rho}{c}\right)(a + b) = 0,$$

$$x - y - \left(k - \frac{\rho}{c}\right)(a - b) = 0.$$

L'élimination de  $k$  entre l'une de ces deux dernières équations et la précédente donne les cylindres

$$(A) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = (a + b)\left(1 - \frac{\rho^2}{c^2}\right),$$

$$(B) \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = (a - b)\left(1 - \frac{\rho^2}{c^2}\right),$$

et les courbes d'intersection avec le plan  $R$ , perpendiculaire à leurs génératrices, constituent le lieu cherché.



Ces équations sont indépendantes du signe de  $c$ . Par suite, chaque cylindre, en prenant pour  $P$  les quatre plans donnés par les diverses combinaisons de signes sur  $a$  et  $b$ , nous fournit quatre coniques.

Le lieu se compose donc de huit coniques.

4° Les surfaces engendrées par ces coniques, quand le plan  $R$  se déplace parallèlement à lui-même, seront représentées par les équations obtenues par l'élimination de  $\rho$  entre les équations (A) ou (B) et l'équation  $z = \rho$ .

Ces équations résultantes sont

$$\frac{x^2}{a(a+b)} + \frac{y^2}{b(a+b)} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a(a-b)} - \frac{y^2}{b(a-b)} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La première représente un ellipsoïde et la seconde un hyperboloïde à une nappe.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et par M. E. Henry, professeur au lycée d'Angers.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879.

### PHILOSOPHIE

PAR M. A. LEINEKUGEL.

PREMIÈRE QUESTION. — On donne un quadrilatère  $ABCD$  : inscrire dans ce quadrilatère un trapèze isoscèle  $MNPQ$ , dont le sommet  $M$  est donné et dont les deux côtés parallèles  $MN$ ,  $PQ$  sont parallèles à la diagonale  $AC$  du quadrilatère. Pour quelles positions du point  $M$  ce trapèze se réduit-il à un triangle?

Par M menons la parallèle à AC qui rencontre BC en N. Sur le milieu de MN élevons une perpendiculaire qui coupe CD en S; prenons le symétrique C' de C par rapport à cette perpendiculaire; C'S coupe AD en Q; par ce point Q, menons QP parallèle à AC. Le quadrilatère MNPQ est le trapèze cherché.

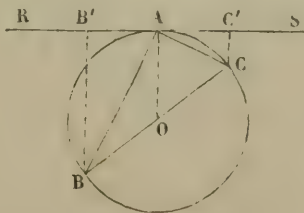
Si l'un des quatre sommets coïncide avec B ou D, on aura évidemment un triangle et dans ce cas seulement. On mènera par les points B et D des perpendiculaires à la diagonale AC et l'on continuera la construction comme tout à l'heure. On obtiendra ainsi quatre positions pour le point M, distinctes en général.

### TROISIÈME,

PAR M. H. LEZ.

PREMIÈRE QUESTION. — *On donne une circonférence O et une droite RS tangente à cette circonférence au point A; on prend un diamètre quelconque BC, et des extrémités B, C de ce diamètre on abaisse les perpendiculaires BB', CC' sur la tangente RS; on mène les cordes AB, AC.*

*Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du trapèze BB'C'C est le même quelle que soit la direction du diamètre BC.*



Le triangle ABC se compose des triangles BOA, COA,

dont les surfaces sont

$$\frac{AO}{2} AB', \quad \frac{AO}{2} AC'.$$

La surface totale est donc égale à

$$\frac{AO}{2} (AB' + AC'),$$

c'est-à-dire à la moitié du trapèze  $BB'C'C$

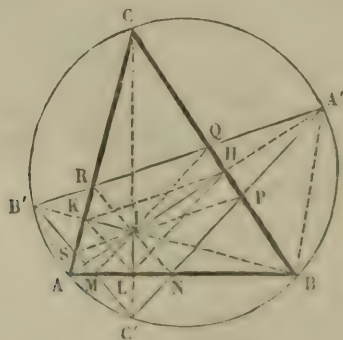
C. Q. F. D.

DEUXIÈME QUESTION. — Soit  $I$  le point de concours des hauteurs d'un triangle  $ABC$ ; on construit un second triangle  $A'B'C'$  dont les sommets  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont respectivement symétriques du point  $I$  par rapport aux droites  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ :

1° Démontrer que les deux triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sont inscrits dans un même cercle;

2° Évaluer les angles du triangle  $A'B'C'$  en supposant connus les angles du triangle  $ABC$ ;

3° Désignant par  $M$  et par  $N$  les points où la droite  $AB$  rencontre les droites  $B'C'$  et  $C'A'$ , par  $P$  et par  $Q$  les points où la droite  $BC$  rencontre les droites  $C'A'$  et  $A'B'$ ,



enfin par  $R$  et par  $S$  les points où la droite  $CA$  rencontre les droites  $A'B'$  et  $B'C'$ , démontrer que les trois droites  $MQ$ ,  $NR$ ,  $PS$  passent par un même point.

*Dans chaque question, on examinera séparément les cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus et le cas où l'un d'entre eux, A par exemple, est obtus.*

Dans les deux cas, les côtés du triangle A'B'C' sont parallèles aux côtés du triangle HKL formé par les pieds des hauteurs du triangle ABC, d'où

$$\widehat{C'A'B'} = \text{H}, \quad \widehat{A'B'C'} = \text{K}, \quad \widehat{B'C'A'} = \text{L}$$

Considérons d'abord un triangle acutangle. Les quadrilatères AKIL, BHIL, CKIH étant inscriptibles, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\text{HKI}} &= \widehat{\text{ICK}} = \widehat{\text{IBL}} = \widehat{\text{IIL}}, \\ \widehat{\text{IKH}} &= \widehat{\text{ICII}} = \widehat{\text{IAL}} = \widehat{\text{IKL}}, \\ \widehat{\text{ILH}} &= \widehat{\text{IBH}} = \widehat{\text{IAK}} = \widehat{\text{ILK}}. \end{aligned}$$

Par suite, les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle A'B'C' et les angles A', B', C' valent deux fois le complément des angles A, B, C.

L'angle ACB, par exemple, étant le complément de KAI = KAB' = HBA' = HBI, les angles A'B'B, AA'B, ACB sont égaux; donc, les sommets B', C, A' sont sur un même segment.

Si nous joignons le point de concours I aux points de rencontre M, Q, R, N, S, P, les quadrilatères IPA'Q, IMC'N étant des losanges, MI et IQ sont parallèles à C'A': donc MQ est une ligne droite.

Par la même raison, RN et SP sont aussi des lignes droites passant par le point I et parallèles à KL, KH.

Lorsque le triangle est obtusangle, en A par exemple, les angles du triangle HKL n'ont pas la même valeur que dans le premier cas. En effet, les quadrilatères ALIK,

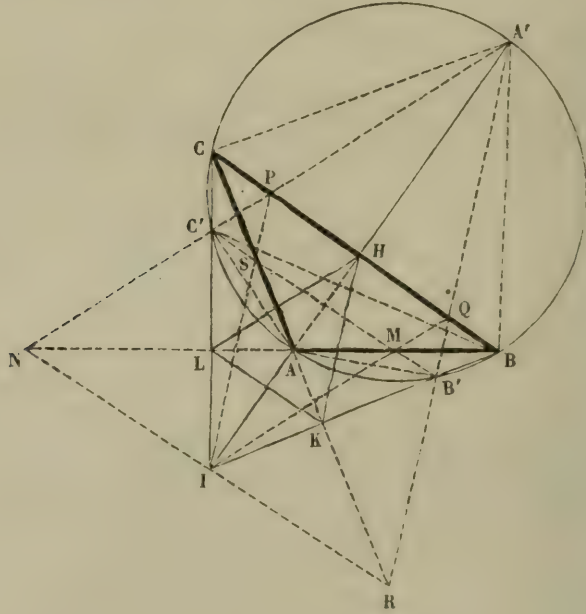


ALCH, AHBK étant inscriptibles, nous avons

$$\widehat{HLA} = \widehat{ACH} = \widehat{AIK} = \widehat{ALK},$$

$$\widehat{AKH} = \widehat{ABH} = \widehat{AIL} = \widehat{AKL}.$$

Les angles L, K sont donc doubles des angles C et B et par suite l'angle H est le double de  $90^\circ - (C + B)$ .



Quant aux triangles ABC et A'B'C', ils restent encore inscriptibles dans le même cercle, car les triangles égaux C'AB et IAB, A'HB et IHB, B'AK et IAK donnent

$$\widehat{AC'B} = \widehat{AIB} = \widehat{ACB},$$

$$\widehat{HA'B} = \widehat{HIB} = \widehat{ACB},$$

$$\widehat{AB'K} = \widehat{AIK} = \widehat{ACB}.$$

Enfin, après avoir joint, comme dans le premier cas, le point I aux points de rencontre des côtés du triangle A'B'C' avec ceux du triangle ABC, nous trouvons encore

que, à cause des losanges  $IPA'Q$ ,  $IMC'N$ , les droites  $IQ$ ,  $IM$  sont parallèles à  $HL$ ; les trois points  $I$ ,  $M$ ,  $Q$  sont donc en ligne droite : donc, etc.

---

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1881.

---

### *Mathématiques spéciales.*

Trouver le lieu des points tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné à trois axes inégaux se sépare en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux.

Montrer que, si l'on se donne un point  $P$  du lieu, la solution de ce problème : mener du point  $P$  les normales à l'ellipsoïde, dépend de la résolution de deux équations du troisième degré. Discuter ces équations.

### *Mathématiques élémentaires.*

I. Étant donné un triangle  $ABC$  inscrit dans un cercle de rayon  $R$ , on mène les bissectrices intérieures des angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; soient  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  les points où elles rencontrent le cercle.

1° Désignant par  $S$ ,  $S_1$  les aires des triangles  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  et par  $d$  le diamètre du cercle inscrit au triangle  $ABC$ , on propose de démontrer que l'on a

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R}{d}.$$

II. On considère une suite indéfinie de triangles  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$ , ...,  $A_nB_nC_n$ , ..., tous inscrits dans le même cercle, et dont chacun se déduit du précédent, comme, dans l'énoncé ci-dessus, le triangle  $A_1B_1C_1$  se

déduit du triangle ABC; démontrer que, lorsque le nombre entier  $m$  augmente indéfiniment, le triangle  $A_{2m}B_{2m}C_{2m}$  tend vers une position limite  $\alpha\beta\gamma$ ; dans les mêmes conditions, le triangle  $A_{2m+1}B_{2m+1}C_{2m+1}$  tend aussi vers une position limite  $\alpha'\beta'\gamma'$ ; Les deux triangles limites  $\alpha\beta\gamma$ ,  $\alpha'\beta'\gamma'$  sont équilatéraux et symétriquement placés par rapport au centre du cercle.

III. Démontrer que, si l'on prend pour unité le rayon  $R$  du cercle, le produit des nombres qui mesurent les diamètres des cercles inscrits aux triangles ABC,  $A_1B_1C_1$ , ...,  $A_nB_nC_n$ , tend vers une limite lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

#### *Philosophie.*

Étant donné un carré ABCD inscrit dans un cercle et un point I dans le plan de ce cercle, on mène les droites qui joignent ce point aux quatre sommets A, B, C, D du carré; soient A', B', C', D' les points où ces droites rencontrent le cercle une seconde fois; démontrer que l'on a, entre les côtés du quadrilatère A'B'C'D', la relation

$$A'B' \times C'D' = B'C' \times A'D'.$$

Réciproquement, étant donnés quatre points A', B', C', D' sur un cercle, tels que l'on ait cette même relation

$$A'B' \times C'D' = B'C' \times A'D',$$

on propose de trouver, dans le plan du cercle, un point I tel que, si l'on mène les droites qui le joignent aux points A', B', C', D', les points A, B, C, D, où ces droites rencontrent une seconde fois le cercle, soient les sommets d'un carré.

#### *Rhétorique.*

I. Un tronc de cône est tel que sa hauteur est moyenne proportionnelle entre les diamètres de ses deux bases. On propose :

1° De démontrer qu'on peut inscrire une sphère dans ce tronc de cône;

2° La hauteur  $H$  étant donnée, de déterminer les rayons des deux bases, de manière que la surface totale du tronc de cône soit équivalente à un cercle de rayon  $a$ . Discussion.

II. Mesure de temps. Jour solaire vrai. Jour solaire moyen.

*Seconde.*

I. Soit un carré  $ABCD$ ; par deux sommets opposés  $A$  et  $C$  de ce carré, on mène, d'un même côté par rapport au plan du carré, les droites  $AK$ ,  $CL$  perpendiculaires à ce plan. On prend sur  $AK$  un point  $A'$ , dont la distance au centre du carré est égale au côté du carré, et, sur  $CL$ , un point  $C'$ , dont la distance au point  $A'$  est égale au double du côté du carré.

1° Démontrer que la droite  $A'C'$  est perpendiculaire au plan  $BDA'$ ;

2° Former, en appelant  $a$  le côté du carré, l'expression du volume de chacun des tétraèdres  $A'ABD$ ,  $C'CBD$ ,  $C'A'BD$ .

II. Soit, sur une droite indéfinie, deux points fixes,  $A$  et  $B$ , dont la distance est  $10^m$ . Deux mobiles parcourent cette droite dans le sens  $AB$  et arrivent en même temps l'un en  $A$ , avec une vitesse de  $3^m$  par seconde, l'autre en  $B$  avec une vitesse de  $v$  mètres par seconde. Le mouvement du premier mobile est uniformément accéléré : sa vitesse s'accroît de  $1^m$  par seconde; le mouvement de second mobile est uniforme. On demande :

1° Dans combien de secondes, après le passage simultané du premier mobile en  $A$  et du second en  $B$ , le premier mobile aura-t-il rejoint le second?



2° Quelle condition doit remplir la vitesse  $v$  du second mobile pour que la rencontre ait lieu à une distance du point B inférieure à  $10^m$ ?

3° A quelle distance du point B a lieu cette rencontre quand  $v = 4^m$ ?

### QUESTIONS.

1396. Intégrer l'équation

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} - (1-2x) \frac{dy}{dx} + y(1-3x+x^2) = -x^2(1-x)^2.$$

(E. FAUQUEMBERGUE.)

1397. On donne une conique inscrite dans un triangle ABC; par les sommets du triangle on mène des droites AA', BB', CC' se coupant en un point O, et par leurs points de rencontre A', B', C' avec les côtés opposés des tangentes à la conique qui coupent les droites B'C', C'A', A'B' en des points  $a, b, c$ . Démontrer que ces trois points sont en ligne droite. (E. FAUQUEMBERGUE.)

1398. Un cercle roule sur une ellipse. Trouver : 1° le lieu des points de contact des tangentes à ce cercle parallèles aux axes de l'ellipse; 2° le lieu des points d'intersection de ces tangentes; 3° la quadrature des courbes obtenues. (E. FAUQUEMBERGUE.)

1399. En chaque point d'une conique, on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu de l'intersection de ce diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la corde normale. (E. FAUQUEMBERGUE.)

# APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES HOMOGÈNES A LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S;

PAR M. CH. BRISSE.

$\lambda, \mu, \nu$  désignant les trois angles formés par les axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ , on sait que la fonction

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos \lambda + 2zx \cos \mu + 2xy \cos \nu$$

est une somme de trois carrés positifs distincts, qui ne s'annule que pour  $x = 0, y = 0, z = 0$ , quand on suppose  $x, y$  et  $z$  réels.

Considérons la fonction à coefficients réels

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

et cherchons pour quelles valeurs du paramètre  $S$  l'expression

$$\varphi - S\sigma$$

se décompose en un produit de deux facteurs linéaires. On sait qu'il est nécessaire et suffisant que  $S$  soit l'une des racines de l'équation du troisième degré

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' - S \cos \nu & B' - S \cos \mu \\ B'' - S \cos \nu & A' - S & B - S \cos \lambda \\ B' - S \cos \mu & B - S \cos \lambda & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

dite *équation en S*.

## ÉTUDE DE L'ÉQUATION EN S.

1<sup>o</sup> *L'équation en S a ses racines réelles.* — Car, si elle avait une racine imaginaire  $u + \nu i$ , l'expression  $\varphi - S\sigma$ , égale à  $\varphi - u\sigma - \nu i\sigma$ , serait à coefficients imaginaires,

non identiquement nulle, et l'un, au moins, des deux facteurs auxquels elle est réductible, serait de la forme  $P + Qi$ ,  $Q$  n'étant pas identiquement nul. On aurait donc l'identité

$$\varphi - u\sigma - iv\sigma = (P + Qi)R.$$

Mais, en substituant dans le second membre, pour  $x, y, z$ , un des systèmes de solutions des équations  $P = 0$ ,  $Q = 0$  autre que  $x = 0, y = 0, z = 0$ , on l'annulerait; on annulerait donc aussi le premier et par suite  $v\sigma$ , ce qui est absurde.

2° Deux racines distinctes de l'équation en  $S$  donnent, pour  $\varphi - S\sigma$ , deux décompositions de nature distincte. —  $S$  étant une racine réelle de l'équation en  $S$ , la fonction  $\varphi - S\sigma$  à coefficients réels peut être ramenée à une somme algébrique de moins de trois carrés, c'est-à-dire à l'une des formes  $P^2 + Q^2$ ,  $P^2 - Q^2$ ,  $-P^2 - Q^2$ ,  $P^2$ ,  $-Q^2$ , 0, que nous appellerons des décompositions de nature distincte. Alors,  $S$  et  $S'$  étant deux racines distinctes de l'équation en  $S$ , je dis qu'on ne peut avoir, par exemple,

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2, \quad \varphi - S'\sigma = P'^2 + Q'^2;$$

car, en retranchant membre à membre, il en résulterait l'identité

$$(S' - S)\sigma = P^2 + Q^2 - P'^2 - Q'^2.$$

Or, en supposant  $S' - S$  positif, et en substituant dans le second membre un des systèmes de solutions des équations  $P = 0$ ,  $Q = 0$  autre que  $x = 0, y = 0, z = 0$ , on l'annulerait ou on le rendrait négatif, ce qui est absurde.

Il est évidemment inutile de répéter la démonstration pour les formes suivantes, mais il est important de remar-

quer que, pour deux racines distinctes de l'équation en  $S$ , la forme  $P^2$  ne peut coexister avec la forme  $P^2 + Q^2$  ou avec la forme  $P^2 - Q^2$ , que la forme  $-Q^2$  ne peut coexister avec la forme  $P^2 - Q^2$  ou avec la forme  $-P^2 - Q^2$ , enfin que la forme  $0$  ne peut coexister avec aucune des précédentes. Pour me borner à un seul cas, je dis, par exemple, qu'on ne peut avoir

$$\varphi - S\sigma = P^2 - Q^2, \quad \varphi - S'\sigma = 0,$$

car il en résulterait

$$(S' - S)\sigma = P^2 - Q^2,$$

et la démonstration s'achèverait comme plus haut.

*Cas où l'équation en  $S$  a trois racines simples.*

Il résulte de là que, si les racines de l'équation en  $S$  sont toutes distinctes, les seules formes de décomposition possibles sont les trois premières  $P^2 + Q^2$ ,  $P^2 - Q^2$ ,  $-P^2 - Q^2$ , et que chacune des racines  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  en donne une, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \varphi - S\sigma &= P^2 + Q^2, \\ \varphi - S'\sigma &= P'^2 - Q'^2, \\ \varphi - S''\sigma &= -P''^2 - Q''^2. \end{aligned}$$

On en déduit les identités

$$\begin{aligned} (S' - S)\sigma &= P^2 + Q^2 + Q'^2 - P'^2, \\ (S'' - S')\sigma &= P''^2 + Q''^2 + P'^2 - Q'^2, \end{aligned}$$

et, en employant toujours le même mode de raisonnement, c'est-à-dire en posant  $P' = 0$  dans la première et  $Q' = 0$  dans la seconde, on en conclut

$$S < S' < S''.$$

Ainsi la plus petite racine donne deux carrés positifs,



la plus grande deux carrés négatifs, et la racine moyenne seule décompose  $\varphi - S\sigma$  en un produit de deux facteurs réels distincts.

La fonction  $\varphi - S\sigma$  n'étant pas, dans ce cas, réductible à moins de deux carrés, aucune des racines de l'équation en  $S$  n'annule tous les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$ .

*Cas où l'équation en  $S$  a une racine double.*

Les racines d'une équation étant des fonctions continues de ses coefficients, pour que l'équation en  $S$  puisse avoir une racine double, il faut, ses racines étant préalablement distinctes, ou que  $S'$  devienne égal à  $S$ , ou que  $S'$  devienne égal à  $S''$ , c'est-à-dire que la racine moyenne devienne égale à l'une ou à l'autre des racines extrêmes. Dans le premier cas, les décompositions primitivement distinctes pour  $S$  et pour  $S'$  devront coïncider, c'est-à-dire que  $\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2$  et  $\varphi - S'\sigma = P'^2 - Q'^2$  se réduiront à  $\varphi - S'\sigma = P'^2$ ; dans le second cas, ce seront les décompositions

$$\varphi - S'\sigma = P'^2 - Q'^2 \quad \text{et} \quad \varphi - S''\sigma = -P''^2 - Q''^2,$$

qui se réduiront à  $\varphi - S'\sigma = -Q'^2$ .

Ainsi, quand l'équation a une racine double, cette racine  $S'$  réduit la fonction  $\varphi - S'\sigma$  à un seul carré: elle annule donc tous les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$ .

Réciproquement, une racine  $S'$  qui annule tous les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$  est au moins double, car elle réduit  $\varphi - S'\sigma$  à un seul carré; ce que nous avons vu ne pouvoir arriver quand l'équation en  $S$  a ses racines distinctes.

*Cas où l'équation en S a une racine triple.*

L'équation en S ayant une racine double S', et la seconde racine S ou S'' étant distincte de S', on a

$$\varphi - S' \sigma = P'^2 \quad \text{avec} \quad \varphi - S'' \sigma = -P''^2 - Q''^2,$$

ou bien

$$\varphi - S \sigma = P^2 + Q^2 \quad \text{avec} \quad \varphi - S' \sigma = -Q'^2.$$

Si les trois racines deviennent égales, ces décompositions primitivement distinctes devront coïncider et, par suite, se réduire identiquement à zéro.

Ainsi, quand l'équation a une racine triple, cette racine réduit la fonction  $\varphi - S \sigma$  à zéro; elle annule donc tous les mineurs du premier ordre de  $\Delta(S)$ .

Réciproquement, une racine qui annule tous les mineurs du premier ordre de  $\Delta(S)$  est triple, car elle réduit  $\varphi - S \sigma$  à zéro; ce que nous avons vu ne pouvoir arriver quand l'équation en S a deux racines distinctes.

*Cas où l'équation en S a une ou plusieurs racines nulles.*

Si l'équation en S a une racine nulle et seulement une, S, S' ou S'',  $\varphi$  est de l'une des formes  $P^2 + Q^2$ ,  $P'^2 - Q'^2$ ,  $-P''^2 - Q''^2$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est de l'une de ces trois formes, l'équation en S a une racine nulle et seulement une.

Si l'équation en S a deux racines nulles, la troisième ne l'étant pas,  $\varphi$  est de l'une des formes  $P'^2$ ,  $-Q'^2$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est de l'une de ces deux formes, l'équation en S a deux racines nulles.

Si l'équation en S avait trois racines nulles,  $\varphi$  serait identiquement nul, et réciproquement.

INFLUENCE DE LA NATURE DES RACINES DE L'ÉQUATION EN S  
SUR LA FORME DE  $\varphi$ .

*Cas où l'équation en S a ses racines simples.* — 1° Si S, S' et S'' sont positifs, il résulte de ce qui précède que  $\varphi$  n'est pas réductible à une somme de moins de trois carrés, et, comme on a l'identité

$$\varphi = P^2 + Q^2 + S\tau,$$

où le second membre ne renferme que des carrés positifs, le même raisonnement déjà employé prouve que  $\varphi$  ne peut contenir aucun carré négatif; on a donc

$$\varphi = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

2° Si S, S' et S'' sont négatifs, on conclut de même, en employant l'identité

$$\varphi = -P'^2 - Q'^2 + S''\tau,$$

que

$$\varphi = -X^2 - Y^2 - Z^2.$$

3° Si S est négatif, S' et S'' positifs, on conclut de l'identité

$$\varphi = P^2 + Q^2 + S\tau$$

que  $\varphi$  renferme au plus deux carrés positifs, et de l'identité

$$\varphi = P'^2 - Q'^2 + S'\tau$$

qu'il renferme au plus un carré négatif; on a donc

$$\varphi = -X^2 + Y^2 + Z^2.$$

4° Si S et S' sont négatifs, S'' positif, on conclut de même, en employant les identités

$$\varphi = P'^2 - Q'^2 + S'\tau, \quad \varphi = -P'' - Q''^2 + S''\tau,$$

que

$$\varphi = -X^2 - Y^2 - Z^2.$$

5° Si l'une des racines est nulle, on a

$$\varphi = Y^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2 - Y^2,$$

suisant que c'est la plus petite, la moyenne ou la plus grande.

*Cas où l'équation en S a une racine double.* — 1° Si la racine double et la racine simple sont positives, on en conclut, comme précédemment,

$$\varphi = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

2° Si la racine double et la racine simple sont négatives,

$$\varphi = -X^2 - Y^2 + Z^2.$$

3° Si la racine simple est négative et la racine double positive,

$$\varphi = -X^2 + Y^2 + Z^2.$$

4° Si la racine double est négative et la racine simple positive,

$$\varphi = -X^2 - Y^2 + Z^2.$$

5° Si la racine simple est nulle,

$$\varphi = Y^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2 - Y^2,$$

suisant que la racine double est positive ou négative.

6° Si la racine double est nulle,

$$\varphi = Z^2 \quad \text{ou} \quad \varphi = -X^2,$$

suisant que la racine simple est positive ou négative.

*Cas où l'équation en S a une racine triple.* — Dans ce cas  $\varphi = S\sigma$ , c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

RÉSUMÉ. — En désignant par  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  des quantités égales à  $+1$ ,  $-1$  ou  $0$ , suisant que  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  sont posi-



tifs, négatifs ou nuls, on peut résumer ce qui précède en disant que

$$\varphi = \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \varepsilon'' Z^2,$$

$X, Y, Z$  étant trois fonctions linéaires distinctes.

APPLICATION A LA CLASSIFICATION DES SURFACES  
DU SECOND ORDRE.

Soit

$$f = \varphi + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

l'équation d'une surface du second ordre. Elle peut s'écrire

$$f = \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \varepsilon'' Z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

ou, en remplaçant  $X, Y, Z$  par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} f = & \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 \\ & + \varepsilon''(a''x + b''y + c''z)^2 \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

On a identiquement

$$\begin{aligned} f = & \varepsilon(ax + by + cz + \varepsilon\lambda)^2 \\ & + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z + \varepsilon'\lambda')^2 \\ & + \varepsilon''(a''x + b''y + c''z + \varepsilon''\lambda'')^2 \\ & - 2(\varepsilon^2 a\lambda + \varepsilon'^2 a'\lambda' + \varepsilon''^2 a''\lambda'' - C)x \\ & - 2(\varepsilon^2 b\lambda + \varepsilon'^2 b'\lambda' + \varepsilon''^2 b''\lambda'' - C')y \\ & - 2(\varepsilon^2 c\lambda + \varepsilon'^2 c'\lambda' + \varepsilon''^2 c''\lambda'' - C'')z \\ & + D - \varepsilon\lambda^2 - \varepsilon'\lambda'^2 - \varepsilon''\lambda''^2 = 0. \end{aligned}$$

1° L'équation en  $S$  n'a pas de racine nulle. — Si l'on détermine  $\lambda, \lambda', \lambda''$  par les équations

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = C,$$

$$b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' = C',$$

$$c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' = C'',$$

ce qui est possible, puisque, les fonctions  $X, Y, Z$  étant

distinctes, le déterminant des coefficients n'est pas nul, l'équation de la surface devient

$$\begin{aligned} \varepsilon(X + \varepsilon\lambda)^2 + \varepsilon'(Y + \varepsilon'\lambda')^2 + \varepsilon''(Z + \varepsilon''\lambda'')^2 \\ = \varepsilon\lambda^2 + \varepsilon'\lambda'^2 + \varepsilon''\lambda''^2 - D, \end{aligned}$$

et fournit les six types suivants:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, & \text{ellipsoïde réel,} \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= -1, & \text{ellipsoïde imaginaire,} \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0, & \text{ellipsoïde-point,} \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= 1, & \text{hyperboloïde à une nappe,} \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= -1, & \text{hyperboloïde à deux nappes,} \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= 0, & \text{cône.} \end{aligned}$$

2° *L'équation en S a une racine nulle.* — Par exemple,  $S''$ , d'où  $\varepsilon'' = 0$ . Si l'on détermine  $\lambda$  et  $\lambda'$  par deux des équations

$$\begin{aligned} a\lambda + a'\lambda' &= C, \\ b\lambda + b'\lambda' &= C', \\ c\lambda + c'\lambda' &= C'', \end{aligned}$$

ce qui est possible, puisque, les fonctions  $X$  et  $Y$  étant distinctes, l'un des trois mineurs  $bc' - cb'$ ,  $ac' - ca'$ ,  $ab' - ba'$  n'est pas nul, par les deux premières par exemple, l'équation de la surface devient

$$\begin{aligned} \varepsilon(X + \varepsilon\lambda)^2 + \varepsilon'(Y + \varepsilon'\lambda')^2 \\ = 2(\varepsilon^2 c\lambda + \varepsilon'^2 c'\lambda' - C'')\varepsilon + \varepsilon\lambda^2 + \varepsilon'\lambda'^2 - D, \end{aligned}$$

et fournit les sept types suivants

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= Z, & \text{paraboloïde elliptique,} \\ X^2 + Y^2 &= 1, & \text{cylindre elliptique,} \\ X^2 + Y^2 &= -1, & \text{cylindre imaginaire,} \\ X^2 + Y^2 &= 0, & \text{plans sécants imaginaires,} \\ X^2 - Y^2 &= Z, & \text{paraboloïde hyperbolique,} \\ X^2 - Y^2 &= 1, & \text{cylindre hyperbolique,} \\ X^2 - Y^2 &= 0, & \text{plans sécants réels.} \end{aligned}$$

3° *L'équation en S a deux racines nulles.* — Par exemple  $S'$  et  $S''$ , d'où  $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ . Si l'on détermine  $\lambda$  par l'une des équations

$$a\lambda - C = 0,$$

$$b\lambda - C' = 0,$$

$$c\lambda - C'' = 0,$$

ce qui est possible, puisque, la fonction  $X$  n'étant pas identiquement nulle, l'une des trois quantités  $a$ ,  $b$ ,  $c$  est différente de zéro, par la première par exemple, l'équation de la surface devient

$$\varepsilon(X + \varepsilon\lambda)^2 = 2(b\lambda - C')x + 2(c\lambda - C'')z + \varepsilon\lambda^2 - D^2,$$

et fournit les quatre types suivants :

$$X^2 = Y, \quad \text{cylindre parabolique,}$$

$$X^2 = 1, \quad \text{plans parallèles réels,}$$

$$X^2 = -1, \quad \text{plans parallèles imaginaires,}$$

$$X^2 = 0, \quad \text{plans confondus.}$$

#### DÉTERMINATION DES SECTIONS CIRCULAIRES.

1° *L'équation en S a ses racines distinctes et aucune de ces racines n'est nulle.* — On a, dans ce cas,

$$\varphi = P^2 + Q^2 + S\sigma,$$

$$\varphi = P'^2 - Q'^2 + S'\sigma,$$

$$\varphi = -P''^2 - Q''^2 + S''\sigma,$$

d'où, en considérant, par exemple, la deuxième forme,

$$f = P'^2 - Q'^2 + S'\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D.$$

L'équation de la surface  $f = 0$  peut donc s'écrire

$$S' \left( \sigma + 2 \frac{C}{S'} x + 2 \frac{C'}{S'} y + 2 \frac{C''}{S'} z + \frac{D}{S'} \right) \\ = (P' + Q')(P' - Q').$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des plans  $P' + Q' = 0$ ,  $P' - Q' = 0$  coupe la surface suivant un cercle. On verrait de même que tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des plans  $P + iQ = 0$ ,  $P - iQ = 0$ ,  $P'' + iQ'' = 0$ ,  $P'' - iQ'' = 0$  coupe aussi la surface suivant un cercle. On a donc ainsi *six* séries de sections circulaires dont *deux réelles*, correspondant à la racine moyenne de l'équation en  $S$  et *quatre imaginaires* correspondant aux racines extrêmes.

Si l'on se reporte à la *classification*, on voit que le cas examiné comprend les six premiers types.

2° *L'équation en  $S$  a ses racines distinctes et l'une de ces racines est nulle.* — Si c'est la racine moyenne, l'équation de la surface peut s'écrire

$$2Cx + 2C'y + 2C''z + D = (P' + Q')(P' - Q').$$

Sous cette forme, on voit que tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des plans  $P' + Q' = 0$ ,  $P' - Q' = 0$  coupe la surface suivant *une seule droite* que l'on peut considérer comme un cercle de rayon infini. Les racines  $S$  et  $S''$  fourniraient quatre séries imaginaires de sections circulaires, comme précédemment. Si l'on se reporte à la *classification*, on voit que le cas examiné correspond au parabolôïde hyperbolique, au cylindre hyperbolique et aux plans sécants réels.

Si la racine nulle n'est pas la racine moyenne, elle fournit deux séries de plans imaginaires dont chacun coupe la surface suivant *une seule droite* imaginaire. La racine moyenne fournit deux séries de sections circulaires réelles et la troisième racine deux séries imaginaires. Ce cas est celui du parabolôïde elliptique, du cylindre elliptique, du cylindre imaginaire et des plans sécants imaginaires.



*Conditions pour qu'une surface du second ordre  
soit de révolution.*

Soit

$$A = ax + by + cz + d = 0$$

un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution et

$$\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

une sphère quelconque passant par le cercle d'intersection de ce plan avec la surface; elle recoupe la surface  $f = 0$  suivant un second cercle dont le plan

$$B = ax + by + cz + d' = 0$$

est parallèle au premier. L'équation générale des surfaces du second ordre passant par les intersections de la sphère et des plans  $A = 0$ ,  $B = 0$  est

$$S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB = 0,$$

en désignant par  $S$  un paramètre arbitraire. Or, parmi ces surfaces doit se trouver  $f = 0$ ; on a donc identiquement, pour une certaine valeur de  $S$ ,

$$f = S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB.$$

Identifiant seulement les termes du second degré, il en résulte

$$\varphi - S\sigma = (ax + by + cz)^2,$$

c'est-à-dire que la fonction  $\varphi - S\sigma$  est réductible à un seul carré. D'ailleurs, s'il en est ainsi, on en conclut

$$f = (ax + by + cz)^2 + (S\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D),$$

c'est-à-dire que la surface  $f = 0$  est de révolution autour d'une perpendiculaire au plan

$$ax + by + cz = 0$$

menée par le centre de la sphère

$$S\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Mais nous avons vu, au début de cet article, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\varphi - S\sigma$  se réduisît à un seul carré étaient que l'équation en  $S$  eût une racine au moins double. Nous avons vu également que cette racine annulait tous les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$ , et réciproquement que toute valeur de  $S$  annulant les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$  était racine double. Donc :

*Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface du second ordre soit de révolution s'obtiennent en exprimant que les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$  ont une racine commune.*

1° *La racine double n'est pas nulle.* — Deux des quantités désignées dans la *classification* par  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$  sont alors de même signe; les six premiers types de la classification et les quatre suivants peuvent donc fournir des surfaces de révolution. Au contraire, le paraboloid hyperbolique, le cylindre hyperbolique et les plans sécants réels n'en fournissent jamais.

2° *La racine double est nulle.* — L'équation de la surface peut alors s'écrire

$$f = (ax + by + cz)^2 + (0.\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0.$$

On peut donc la regarder comme étant de révolution autour d'une perpendiculaire au plan

$$ax + by + cz = 0.$$

menée par le centre de la sphère

$$0.\sigma + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

qui est à l'infini.

Ce cas comprend le cylindre parabolique, les plans parallèles réels, imaginaires et confondus.

*Il n'y a de sections circulaires que celles fournies par l'équation en S.*

Soit en effet

$$A = ax + by + cz + d = 0$$

un plan de section circulaire et

$$\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

une sphère quelconque passant par ce cercle; elle recoupe la surface  $f = 0$  suivant une seconde courbe plane; soit

$$B = a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

l'équation du plan de cette courbe. L'équation générale des surfaces du second ordre passant par les intersections de la sphère et des plans  $A = 0$ ,  $B = 0$  est

$$S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB = 0,$$

en désignant par S un paramètre arbitraire. Or, parmi ces surfaces, doit se trouver  $f = 0$  : on a donc identiquement, pour une certaine valeur de S,

$$f = S(\sigma + 2mx + 2ny + 2pz + q) + AB.$$

Identifiant seulement les termes du second degré, il en résulte

$$\varphi - S\sigma = (ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z),$$

c'est-à-dire que S est une des racines de l'équation en S, et que  $A = 0$ ,  $B = 0$  appartiennent à l'une des séries trouvées de sections circulaires.

---

## RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES SURFACES DU SECOND ORDRE EN COORDONNÉES OBLIQUES;

PAR M. CH. BRISSE.

1. On sait que les formules de transformation de coordonnées d'axes obliques à axes obliques sont

$$(1) \quad \begin{cases} x + y \cos \nu + z \cos \mu = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' + z' \cos \alpha'', \\ x \cos \nu + y + z \cos \lambda = x' \cos \beta + y' \cos \beta' + z' \cos \beta'', \\ x \cos \mu + y \cos \lambda + z = x' \cos \gamma + y' \cos \gamma' + z' \cos \gamma'', \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  désignant les angles que fait le nouvel axe des  $x$ ,  $\alpha', \beta', \gamma'$  ceux que fait le nouvel axe des  $y$  et  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  ceux que fait le nouvel axe des  $z$  avec les anciens axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ .

Mais il y a lieu de remarquer la forme simple que prennent ces formules lorsque, au lieu des angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , on introduit les coordonnées  $a, b, c$  d'un point pris sur l'axe des  $x'$  à l'unité de distance de l'origine, et de même pour  $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ .

Le théorème des projections donne, en effet,

$$(2) \quad \begin{cases} \cos \alpha = a + b \cos \nu + c \cos \mu, \\ \cos \beta = a \cos \nu + b + c \cos \lambda, \\ \cos \gamma = a \cos \mu + b \cos \lambda + c. \end{cases}$$

et des expressions analogues pour  $\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma', \cos \alpha'', \cos \beta'', \cos \gamma''$ . Substituant ces valeurs dans les



seconds membres des formules (1), elles deviennent

$$\begin{aligned}
 x + y \cos \nu + z \cos \mu &= ax' + a'y' + a''z' \\
 &\quad + (bx' + b'y' + b''z') \cos \nu + (cx' + c'y' + c''z') \cos \mu, \\
 x \cos \nu + y + z \cos \lambda &= (ax' + a'y' + a''z') \cos \nu \\
 &\quad + bx' + b'y' + b''z' + (cx' + c'y' + c''z') \cos \lambda, \\
 x \cos \mu + y \cos \lambda + z &= (ax' + a'y' + a''z') \cos \mu \\
 &\quad + (bx' + b'y' + b''z') \cos \lambda + cx' + c'y' + c''z'.
 \end{aligned}$$

Mais le déterminant des coefficients des premiers membres est, comme on sait, différent de zéro : les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont donc uniques, et, comme on aperçoit immédiatement les solutions

$$(3) \quad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

le système (1) est résolu.

2. Pour pouvoir appliquer les formules (3) d'une façon simple, il est nécessaire de connaître l'angle de deux droites en coordonnées obliques.

On sait qu'en désignant par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les angles que fait l'une des droites avec les axes, et par  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  les angles que fait l'autre, l'angle  $V$  des deux droites est donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & \cos \alpha \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & \cos \beta \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos \gamma \\ \cos \alpha' & \cos \beta' & \cos \gamma' & \cos V \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçant dans ce déterminant  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  par

les valeurs (2) et  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$ ,  $\cos \gamma'$  par les valeurs analogues, on aura

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & \cos \nu & \cos \mu & a+b \cos \nu+c \cos \mu & \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & a \cos \nu+b+c \cos \lambda & \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & a \cos \mu+b \cos \lambda+c & \\ b' \cos \nu+c' \cos \mu & a' \cos \nu+b'+c' \cos \lambda & a' \cos \mu+b' \cos \lambda+c' & \cos V & = 0. \end{array}$$

Or, si l'on multiplie la première colonne par  $-a$ , la deuxième par  $-b$ , la troisième par  $-c$ , et qu'on ajoute respectivement les produits obtenus aux termes correspondants de la dernière colonne, les trois premiers termes de cette colonne deviennent nuls; on a donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos V = aa' + bb' + cc' + (bc' + cb') \cos \lambda \\ \quad + (ca' + ac') \cos \mu + (ab' + ba') \cos \nu. \end{array} \right.$$

La condition de perpendicularité de deux droites en résulte; elle est

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} aa' + bb' + cc' + (bc' + cb') \cos \lambda \\ \quad + (ca' + ac') \cos \mu + (ab' + ba') \cos \nu = 0. \end{array} \right.$$

3. Nous allons appliquer les formules qui précèdent à la recherche des cordes principales dans les surfaces du second ordre. On sait qu'on appelle ainsi celles qui sont perpendiculaires à la direction du plan diamétral correspondant.

Soient

$$(6) \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

les équations d'une direction de cordes,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  étant les coordonnées du point de cette droite qui est à l'unité de distance de l'origine. Un plan parallèle au plan diamétral correspondant a pour équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Aa + B''b + B'c)x + (B''a + A'b + Bc)y \\ \quad + (B'a + Bb + A''c)z = 0, \end{array} \right.$$

en adoptant pour les coefficients de l'équation de la surface la notation ordinaire. Pour que la droite (6) et le plan (7) soient perpendiculaires, il faut que les coefficients de l'équation (7) soient, à un facteur près que nous désignerons par  $S$ , égaux aux cosinus des angles que la droite (6) fait avec les axes, c'est-à-dire, eu égard aux équations (2), que l'on ait

$$(8) \quad \begin{cases} Aa + B''b + B'c = S(a + b \cos \nu + c \cos \mu), \\ B''a + A'b + Bc = S(a \cos \nu + b + c \cos \lambda), \\ B'a + Bb + A''c = S(a \cos \mu + b \cos \lambda + c), \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire

$$(9) \quad \begin{cases} (A - S)a + (B'' - S \cos \nu)b + (B' - S \cos \mu)c = 0, \\ (B'' - S \cos \nu)a + (A' - S)b + (B - S \cos \lambda)c = 0, \\ (B' - S \cos \mu)a + (B - S \cos \lambda)b + (A'' - S)c = 0. \end{cases}$$

Il faut donc choisir  $S$  tel que ces trois équations aient en  $a, b, c$  d'autres solutions que zéro. Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le déterminant des coefficients, c'est-à-dire précisément la fonction  $\Delta(S)$  de l'article précédent, soit égal à zéro.

1° Une racine simple de l'équation en  $S$  donne une direction de cordes principales et une seule. — Car, une racine simple n'annulant pas tous les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$ , on pourra, de deux des équations (9) correspondant à un mineur non nul, tirer les rapports des inconnues, coefficients des termes de ce mineur, à la troisième.

2° Une racine double de l'équation en  $S$  donne une infinité de directions de cordes principales parallèles à un même plan. — Car une racine double annulant tous les mineurs du second ordre de  $\Delta(S)$ , mais n'annulant pas tous ceux du premier, les trois équations (9) se ré-

duisent à l'une d'entre elles dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

3° Une racine triple de l'équation en  $S$  donne pour les cordes principales une direction arbitraire. — Car elle annule tous les mineurs du premier ordre de  $\Delta(S)$ , et rend identiques les équations (9).

4° Deux racines distinctes de l'équation en  $S$  donnent des directions de cordes principales rectangulaires. — Car, si l'on désigne par  $S$  et  $S'$  ces deux racines, on a les équations

$$\begin{aligned} (A - S)a + (B'' - S \cos \nu)b + (B' - S \cos \mu)c &= 0, \\ (B'' - S \cos \nu)a + (A' - S)b + (B - S \cos \lambda)c &= 0, \\ (B' - S \cos \mu)a + (B - S \cos \lambda)b + (A'' - S)c &= 0, \\ (A - S')a' + (B'' - S' \cos' \nu)b' + (B' - S' \cos \mu)c' &= 0, \\ (B'' - S' \cos \nu)a' + (A' - S')b' + (B - S' \cos \lambda)c' &= 0, \\ (B' - S' \cos \mu)a' + (B - S' \cos \lambda)b' + (A'' - S')c' &= 0. \end{aligned}$$

Or, en les multipliant respectivement par  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $-a$ ,  $-b$ ,  $-c$  et les ajoutant, on a

$$(S' - S)[aa' + bb' + cc' + (bc' + cb') \cos \lambda + (ca' + ac') \cos \mu + (ab' + ba') \cos \nu] = 0,$$

c'est-à-dire, puisque  $S' - S$  n'est pas nul,

$$aa' + bb' + cc' + (bc' + cb') \cos \lambda + (ca' + ac') \cos \mu + (ab' + ba') \cos \nu = 0,$$

ce qui est la condition de perpendicularité (5).

RÉSUMÉ. — Il résulte de là qu'il y a trois directions de cordes principales formant un trièdre trirectangle quand l'équation en  $S$  a ses racines distinctes, qu'il y a un plan de directions principales quand elle a une racine double, et une direction principale perpendiculaire à ce plan correspondant à la racine simple, que toute direction est principale quand l'équation en  $S$  a une racine triple.



*Relations entre les directions des cordes principales  
et celles des plans de sections circulaires.*

4.  $S$  étant une des racines de l'équation en  $S$ , nous avons vu qu'un système de plans de sections circulaires correspondant à cette racine était

$$\varphi - S\sigma = 0.$$

L'intersection de ces deux plans s'obtient en écrivant les équations du centre

$$\varphi'_x - S\sigma'_x = 0,$$

$$\varphi'_y - S\sigma'_y = 0,$$

$$\varphi'_z - S\sigma'_z = 0,$$

qui, en y remplaçant  $x, y, z$  par  $a, b, c$ , coïncident avec les équations (9). Par conséquent :

1° Si l'équation en  $S$  a trois racines simples, les plans des sections circulaires sont respectivement parallèles aux cordes principales correspondant aux mêmes racines ;

2° Si l'équation en  $S$  a une racine double, les plans des sections circulaires correspondant à cette racine sont parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de la surface, qui est de révolution ; ceux qui correspondent à la racine simple sont parallèles à cet axe ;

3° Si l'équation en  $S$  a une racine triple, les plans des sections circulaires ont une direction arbitraire ; d'ailleurs la surface est une sphère.

*Réduction de l'équation générale du second degré.*

5. Trois directions de cordes forment un système conjugué lorsque le plan diamétral relatif à chacune d'elles est parallèle aux deux autres.

Soient

$$(10) \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}, \quad \frac{x}{a''} = \frac{y}{b''} = \frac{z}{c''}$$

trois directions de cordes; des plans parallèles aux plans diamétraux correspondants auront pour équations

$$x\varphi'_a + y\varphi'_b + z\varphi'_c = 0,$$

$$x\varphi'_{a'} + y\varphi'_{b'} + z\varphi'_{c'} = 0,$$

$$x\varphi'_{a''} + y\varphi'_{b''} + z\varphi'_{c''} = 0,$$

et les conditions de parallélisme de chacun de ces plans aux deux autres cordes se réduiront à trois :

$$\left\{ \begin{array}{l} Aa'a'' + A'b'b'' + A''c'c'' + B(c'b'' + b'c'') \\ \quad + B'(c'a'' + a'c'') + B''(a'b'' + b'a'') = 0, \\ Aa''a + A'b''b + A''c''c + B(c''b + b''c) \\ \quad + B'(c''a + a''c) + B''(a''b + b''a) = 0, \\ Aaa' + A'bb' + A''cc' + B(cb' + bc') \\ \quad + B'(ca' + ac') + B''(ab' + ba') = 0. \end{array} \right.$$

6. Proposons-nous de rapporter la quadrique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B\gamma z \\ + 2B'\gamma x + 2B''xy + 2Cx + 2C'\gamma + 2C''z + D = 0$$

à trois axes de coordonnées formant un système conjugué quelconque. Si les équations (10) sont celles des nouveaux axes, les formules de transformation (3) nous donneront pour la nouvelle équation de la surface

$$\left\{ \begin{array}{l} (Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 \\ \quad + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab)x'^2 \\ + (Aa'^2 + A'b'^2 + A''c'^2 \\ \quad + 2Bb'c' + 2B'c'a' + 2B''a'b')\gamma'^2 \\ + (Aa''^2 + A'b''^2 + A''c''^2 \\ \quad + 2Bb''c'' + 2B'c''a'' + 2B''a''b'')z'^2 \\ + 2(Ca + C'b + C''c)x' + 2(Ca' + C'b' + C''c')\gamma' \\ \quad + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z' + D = 0, \end{array} \right.$$

car les coefficients des termes en  $yz$ , en  $zx$  et en  $xy$  sont précisément les doubles des premiers membres des équations (11).

7. Nous pouvons supposer, en particulier, que les équations (10) sont celles de trois cordes principales formant un trièdre trirectangle, et par suite un système conjugué. Soient  $S, S', S''$  les racines, distinctes ou non, de l'équation en  $S$  correspondant à chacune de ces cordes, nous aurons

$$Aa + B'b + B'c = S(a + b \cos \nu + c \cos \mu),$$

$$B''a + A'b + Bc = S(a \cos \nu + b + c \cos \lambda),$$

$$B'a + Bb + A''c = S(a \cos \mu + b \cos \lambda + c),$$

et deux autres systèmes analogues. Multipliant ces équations respectivement par  $a, b, c$ , et ajoutant, on a

$$\begin{aligned} & Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab \\ &= S(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \lambda + 2ca \cos \mu + 2ab \cos \nu). \end{aligned}$$

Mais le point  $(a, b, c)$  est à l'unité de distance de l'origine, donc

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \lambda + 2ca \cos \mu + 2ab \cos \nu = 1.$$

Par suite, l'équation (12) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & Sx'^2 + S'y'^2 + S''z'^2 \\ & + 2(Ca + C'b + C''c)x' + 2(Ca' + C'b' + C''c')y' \\ & + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z' + D = 0. \end{aligned}$$

Si l'on transporte l'origine au point  $(m, n, p)$ , cette équation devient

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 \\ & + 2(Ca + C'b + C''c + Sm)x \\ & + 2(Ca' + C'b' + C''c' + S'n)y \\ & + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'' + S''p)z \\ & + Sm^2 + S'n^2 + S''p^2 + 2(Ca + C'b + C''c)m \\ & + 2(Ca' + C'b' + C''c')n \\ & + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')p + D = 0 \end{aligned} \right.$$

1° *L'équation en S n'a pas de racine nulle.* — On peut alors prendre

$$m = - \frac{Ca + C'b + C''c}{S},$$

$$n = - \frac{Ca' + C'b' + C''c'}{S'},$$

$$p = - \frac{Ca'' + C'b'' + C''c''}{S''},$$

et l'équation (13) devient

$$(14) \quad Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = H,$$

en désignant par H le terme indépendant.

2° *L'équation en S a une racine nulle.* — Supposons que ce soit S''. On peut encore prendre

$$m = - \frac{Ca + C'b + C''c}{S}, \quad n = - \frac{Ca' + C'b' + C''c'}{S'},$$

et l'équation (13) devient

$$Sx^2 + S'y^2 + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z$$

$$+ 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')p$$

$$- \frac{(Ca + C'b + C''c)^2}{S}$$

$$- \frac{(Ca' + C'b' + C''c')^2}{S'} + D = 0.$$

Si  $Ca'' + C'b'' + C''c''$  est différent de zéro, on peut déterminer  $p$  par la condition que le terme indépendant disparaisse, ce qui donne

$$(15) \quad Sx^2 + S'y^2 + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z = 0.$$

Si  $Ca'' + C'b'' + C''c'' = 0$ , on a, quel que soit  $p$ ,

$$(16) \quad Sx^2 + S'y^2 = H',$$

en désignant par H' le terme indépendant.

3° *L'équation en S a deux racines nulles.* — Suppo-



sons que ce soient  $S'$  et  $S''$ . On peut encore prendre

$$m = - \frac{Ca + C'b + C''c}{S},$$

et l'équation (13) devient

$$\begin{aligned} Sx^2 + 2(Ca' + C'b' + C''c')y + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z \\ + 2(Ca' + C'b' + C''c')n + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')p \\ - \frac{(Ca + C'b + C''c)^2}{S} + D = 0. \end{aligned}$$

Si l'une des expressions

$$Ca' + C'b' + C''c', \quad Ca'' + C'b'' + C''c''$$

est différente de zéro, par exemple la première, on peut choisir arbitrairement  $p$  et déterminer  $n$  par la condition que le terme indépendant disparaisse, ce qui donne

$$(17) \quad \begin{cases} Sx^2 + 2(Ca' + C'b' + C''c')y \\ \quad + 2(Ca'' + C'b'' + C''c'')z = 0. \end{cases}$$

Si  $Ca' + C'b' + C''c'$  et  $Ca'' + C'b'' + C''c''$  sont nuls, on a, quels que soient  $n$  et  $p$ ,

$$(18) \quad Sx^2 = H'',$$

en désignant par  $H''$  le terme indépendant.

Les équations (14), (15), (16), (17) et (18) sont les équations réduites des dix-sept espèces de quadriques. Dans le cas de l'équation (17), l'équation en  $S$  a une racine double nulle; les équations (9) se réduisent donc à l'une d'entre elles, et dès lors on peut adjoindre à cette équation l'une ou l'autre de celles-ci

$$Ca' + C'b' + C''c' = 0, \quad Ca'' + C'b'' + C''c'' = 0,$$

de manière à ne plus avoir dans l'équation (17) qu'un terme du premier degré en  $y$  ou en  $z$ .

---

**SUR L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SURFACE  
DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ ;**

PAR M. J. CARON.

---

La nouvelle méthode que M. E. Rouché vient de donner (même tome, p. 97), pour trouver l'intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, présente l'avantage d'être applicable à toutes les surfaces de révolution du second degré.

Pour mettre en évidence ce résultat, rappelons les théorèmes suivants :

**THÉORÈME I.** — *L'intersection de deux surfaces du second degré se projette sur un plan diamétral principal commun suivant une courbe du second degré.*

**THÉORÈME II.** — *Un plan P coupant deux surfaces du second degré suivant deux courbes homothétiques, toutes les surfaces du second degré passant par l'intersection des deux premières surfaces sont coupées par le même plan P suivant des courbes homothétiques des premières sections.*

Il résulte de ces deux théorèmes que l'intersection de deux surfaces de révolution du second degré, ayant même plan d'équateur, se projette sur ce plan d'équateur suivant une circonférence.

En effet, étant données deux surfaces de révolution du second degré ayant leurs centres dans un même plan perpendiculaire aux deux axes de révolution, ce plan est un plan diamétral principal commun aux deux surfaces, et par suite l'intersection se projette sur ce plan suivant une conique (Théorème I).

Le cylindre projetant la courbe parallèlement aux axes est donc du second degré; si nous lui appliquons le théorème II, ce cylindre passant par l'intersection des deux surfaces sera coupé par le plan des équateurs suivant une circonférence.

On serait arrivé au même résultat à l'aide du théorème suivant :

**THÉOREME III.** — *Toutes les surfaces du second degré passant par l'intersection de deux surfaces de révolution du second degré dont les axes sont parallèles sont également de révolution avec des axes parallèles aux premiers.*

Pour trouver alors l'intersection d'une droite avec une surface de révolution du second degré quelconque, on choisit comme surface auxiliaire passant par la droite un hyperboloïde engendré par cette droite en tournant autour d'un axe parallèle à l'axe de la première surface.

On choisira de plus l'axe auxiliaire, de manière que l'hyperboloïde et la surface donnée admettent même plan d'équateur, comme dans la méthode de M. Rouché.

L'hyperboloïde coupera alors la surface donnée suivant une courbe dont la projection sur le plan commun des équateurs sera une circonférence.

Les points de rencontre de cette circonférence avec la projection de même nom de la droite donnée détermineront les points demandés.

On aura d'ailleurs quatre points de la circonférence d'intersection, en coupant la surface donnée et l'hyperboloïde auxiliaire successivement par deux plans perpendiculaires aux axes de révolution.

*Remarque.* — Il n'est pas nécessaire évidemment de construire l'hyperboloïde auxiliaire pour trouver quand même son intersection avec un plan perpendiculaire à

l'axe, puisqu'on a immédiatement un point de ce parallèle, en prenant l'intersection du plan sécant avec la droite donnée.

## SUR L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE ;

PAR M. ERNEST LEBON.

On peut appliquer à toute surface de révolution du second ordre, sauf au paraboloidé (<sup>1</sup>), la remarquable construction donnée par M. Eugène Rouché dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (même tome, p. 97) pour l'hyperboloïde à une nappe. En effet, on démontre aisément que *quand deux surfaces de révolution du second ordre ont leurs axes de révolution parallèles et un plan principal commun perpendiculaire à ces axes, leur intersection se projette sur ce plan selon une circonférence*. Par suite, en supposant que l'axe de révolution de la surface considérée est vertical, on peut toujours employer un hyperboloïde de révolution auxiliaire  $H_1$  ; ou, si l'on veut, un cône de révolution à axe vertical dont le sommet est le point d'intersection  $e, e'$  de la droite donnée  $d, d'$  et du plan principal horizontal de la surface et dont une génératrice est cette droite.

(<sup>1</sup>) On sait qu'on emploie alors pour surface auxiliaire un plan passant par la droite et coupant l'axe de révolution, et qu'on projette la section sur un plan perpendiculaire à l'axe.



**SOLUTION D'UNE QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE  
AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1880;**

PAR M. E. HENRY,

Professeur au Lycée d'Angers.

*Soient  $u$  une fonction donnée d'une variable  $\alpha$ , et  $u'$  sa dérivée. Soit  $\varphi(\beta)$  une fonction donnée d'une autre variable  $\beta$ . On considère une surface  $S$  telle que les coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  d'un quelconque de ses points s'expriment par les formules*

$$\begin{aligned}x &= (u + \beta) \cos \alpha - u' \sin \alpha, \\y &= (u + \beta) \sin \alpha + u' \cos \alpha, \\z &= \varphi(\beta).\end{aligned}$$

*1° Démontrer que les projections sur le plan  $xOy$  des sections de la surface par les plans parallèles à  $xOy$  ont même développée;*

*2° Démontrer que les normales à la surface  $S$  aux différents points d'une quelconque de ces sections forment une surface développable, et déterminer l'arête de rebroussement de cette surface;*

*3° Trouver les lignes de courbure de la surface  $S$ , et les rayons de courbure principaux en un quelconque de ses points.*

*1° Les coordonnées  $\xi, \eta$  du centre de courbure d'une courbe plane sont données par les formules*

$$\xi = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}, \quad \eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

*dans lesquelles  $x$  et  $y$  représentent les coordonnées du*

point de la courbe. Nous allons calculer  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$  dans l'hypothèse de  $\beta$  constante,  $y$  étant une fonction de  $z$ , qui elle-même est fonction de la variable indépendante  $x$ . Différentions, à cet effet, dans cette hypothèse, les deux premières des équations données. Nous aurons

$$1 = (u + \beta + u'') \sin z \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = (u + \beta + u'') \cos z \frac{dz}{dx},$$

$u''$  étant la dérivée de  $u'$  par rapport à  $z$ . On en tire

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\tan z}.$$

Différentions cette dernière relation par rapport à  $x$ . Nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 z} \frac{dz}{dx},$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{1}{(u + \beta + u'') \sin^3 z}.$$

Portant ces valeurs dans les expressions de  $\xi$  et de  $r_1$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \xi &= (u + \beta) \cos z - u' \sin z \\ &\quad - \left[ 1 + \frac{1}{\tan^2 z} \right] (u + \beta + u'') \sin^3 z \frac{1}{\tan z}; \end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \quad \xi = - (u' \sin z + u'' \cos z).$$

On a de même

$$\begin{aligned} r_1 &= (u + \beta) \sin z + u' \cos z \\ &\quad - \left[ 1 + \frac{1}{\tan^2 z} \right] (u + \beta + u'') \sin^3 z; \end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$(2) \quad r_1 = u' \cos \alpha - u'' \sin \alpha.$$

Les formules (1) et (2) ne contiennent pas  $\beta$ . Donc la courbe qu'elles représentent quand  $\alpha$  varie ne dépend pas de la hauteur du plan de cette courbe au-dessus de celui des  $xy$ .

Calculons le rayon de courbure. On a

$$\begin{aligned} R &= \pm \left[ \frac{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right]^{\frac{3}{2}} \\ &= \pm \left[ 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right]^{\frac{3}{2}} (u \pm \beta \pm u'') \sin^3 \alpha; \end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$(3) \quad R = \pm (u + \beta + u'').$$

La différence constante entre les rayons de courbure en deux points correspondants de deux sections est précisément égale à la variation de  $\beta$ . On prendra celui des deux signes  $\pm$  qui rend positive la valeur de  $R$ . Cela dépendra du signe de  $u + \beta + u''$ .

2° En posant  $\frac{dz}{dx} = p$ ,  $\frac{dz}{dy} = q$ , on sait que l'équation

différentielle des lignes de courbure est

$$(4) \quad \frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq}.$$

Il faut vérifier que cette équation est satisfaite par les coordonnées des divers points d'une même section parallèle au plan  $xOy$ . Calculons les quantités  $p$  et  $q$ , et pour cela différencions les équations données tour à tour

par rapport à  $x$  et à  $y$ , prises comme variables indépendantes, en considérant  $z$  et  $\beta$  comme fonctions de  $x$  et de  $y$ . Nous aurons

$$1 = \cos z \frac{d\beta}{dx} - (u + \beta + u'') \sin z \frac{dz}{dx},$$

$$0 = \sin z \frac{d\beta}{dx} + (u + \beta + u'') \cos z \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(\beta) \frac{d\beta}{dx},$$

$$0 = \cos z \frac{d\beta}{dy} - (u + \beta + u'') \sin z \frac{dz}{dy},$$

$$1 = \sin z \frac{d\beta}{dy} + (u + \beta + u'') \cos z \frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi'(\beta) \frac{d\beta}{dy}.$$

De ces équations, on tire

$$\frac{d\beta}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{\sin z}{u + \beta + u''},$$

$$\frac{d\beta}{dy} = \sin z, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{\cos z}{u + \beta + u''},$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \varphi'(\beta) \cos z, \quad q = \frac{dz}{dy} = \varphi'(\beta) \sin z.$$

Si maintenant on considère un point se déplaçant sur une section parallèle au plan  $xOy$ , on devra supposer  $dz$  nul, et calculer  $dp$  et  $dq$  dans l'hypothèse de  $\beta$  constant et de  $z$  seul variable. On aura ainsi

$$dp = - \varphi'(\beta) \sin z \, dz, \quad dq = \varphi'(\beta) \cos z \, dz.$$

On a d'ailleurs, dans les mêmes hypothèses,

$$dx = - (u + \beta + u'') \sin z \, dz,$$

$$dy = (u + \beta + u'') \cos z \, dz.$$



Portant ces valeurs dans l'équation (4), on a

$$\frac{-(u + \beta + u'') \cos \alpha \, d\alpha}{-\varphi'(\beta) \sin \alpha \, d\alpha} = \frac{(u + \beta + u'') \cos \alpha \, d\alpha}{\varphi'(\beta) \cos \alpha \, d\alpha}.$$

Cette équation est identique. Ses deux membres ont pour valeur commune  $\frac{u + \beta + u''}{\varphi'(\beta)}$ . Donc les normales à la surface S aux divers points de la section considérée forment bien une surface développable.

Cherchons l'arête de rebroussement de cette surface. Les équations d'une génératrice étant

$$(5) \quad \begin{cases} X - x + p(Z - z) = 0, \\ Y - y + q(Z - z) = 0, \end{cases}$$

cherchons celles de la génératrice infiniment voisine, dans l'hypothèse de  $dz = 0$ . Nous aurons

$$\begin{cases} X - x - dx + p(Z - z) + dp(Z - z) = 0, \\ Y - y - dy + q(Z - z) + dq(Z - z) = 0. \end{cases}$$

En tenant compte des précédentes, ces deux dernières se réduisent à

$$\begin{aligned} -dx + dp(Z - z) &= 0, \\ -dy + dq(Z - z) &= 0. \end{aligned}$$

Et comme, pour le cas particulier actuel, on a  $\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq}$ , ces deux dernières se réduisent à une seule et donnent

$$(6) \quad Z = z + \frac{dx}{dp}.$$

En portant dans les équations (5), on a

$$(7) \quad X = x - p \frac{dx}{dp}, \quad Y = y - q \frac{dx}{dp}.$$

En remplaçant  $x, y, z$  par leurs valeurs tirées des équations de la surface S, et  $dx, dy, p, q, dp, dq$  par les va-

leurs que nous venons de calculer, on trouve les équations qui définissent l'arête de rebroussement avec les variables  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$X = -(u' \sin \alpha + u'' \cos \alpha),$$

$$Y = u' \cos \alpha - u'' \sin \alpha,$$

$$Z = \varphi(\beta) + \frac{u + \beta + u''}{\varphi'(\beta)}.$$

On voit que cette arête de rebroussement se projette sur le plan  $xOy$  suivant la courbe définie pour les équations (1) et (2).

Les cosinus directeurs de la tangente à l'arête de rebroussement sont

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Ce dernier a pour valeur  $\frac{1}{\sqrt{1+[\varphi'(\beta)]^2}}$ , quantité constante pour une même section parallèle à  $xOy$ . Donc la tangente à l'arête de rebroussement faisant un angle constant avec  $Oz$ , cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre à base quelconque dont les génératrices sont parallèles à  $Oz$ .

3° On pourrait, pour trouver les lignes de courbure de la surface  $S$ , appliquer la méthode générale; mais il est plus simple de remarquer que, d'après ce qui précède, l'un des systèmes est formé des sections parallèles à  $xOy$ . L'autre système, formé de lignes orthogonales aux premières, se projette sur le plan  $xOy$  suivant les trajectoires orthogonales des projections sur ce plan des courbes du premier système. Ces dernières, ayant même développée, ont pour trajectoires orthogonales les tangentes à la courbe définie pour les équations (1) et (2),

et les plans menés par ces tangentes perpendiculairement à  $xOy$  coupent la surface  $S$  suivant les lignes de courbure du second système.

En traitant la question par le calcul, on devra calculer les quantités  $dx, dy, dz, p, q, dp, dq$  sans faire aucune hypothèse particulière, en regardant  $z, \alpha, \beta$  comme fonctions des variables indépendantes  $x$  et  $y$ . On aura ainsi

$$\begin{aligned} dx &= \cos \alpha d\beta - (u + \beta + u'') \sin \alpha d\alpha, \\ dy &= \sin \alpha d\beta + (u + \beta + u'') \cos \alpha d\alpha, \\ dz &= \varphi'(\beta) d\beta, \\ p &= \varphi'(\beta) \cos \alpha, \\ q &= \varphi'(\beta) \sin \alpha, \\ dp &= \varphi''(\beta) \cos \alpha d\beta - \varphi'(\beta) \sin \alpha d\alpha, \\ dq &= \varphi''(\beta) \sin \alpha d\beta + \varphi'(\beta) \cos \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq},$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \alpha d\beta - (u + \beta + u'') \sin \alpha d\alpha + [\varphi'(\beta)]^2 \cos \alpha d\beta}{\varphi''(\beta) \cos \alpha d\beta - \varphi'(\beta) \sin \alpha d\alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha d\beta + (u + \beta + u'') \cos \alpha d\alpha + [\varphi'(\beta)]^2 \sin \alpha d\beta}{\varphi''(\beta) \sin \alpha d\beta + \varphi'(\beta) \cos \alpha d\alpha} \end{aligned}$$

Toutes réductions faites, cette équation donne

$$\{ (u + \beta + u'') \varphi''(\beta) - \varphi'(\beta) - [\varphi'(\beta)]^2 \} d\alpha d\beta = 0.$$

En supprimant le facteur entre accolades qui ne donne aucune constante arbitraire, on a

$$d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad d\beta = 0.$$

La solution  $d\beta = 0$  donne  $\beta = \text{const.}$ , c'est-à-dire  $z = \text{const.}$  On retrouve les sections de la surface  $S$  par des plans parallèles à  $xOy$ . La solution  $d\alpha = 0$  donne  $\alpha = \text{const.}$  En éliminant  $\beta$  entre les deux premières équations de la surface  $S$ , nous trouverons l'équation

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = u',$$

pour représenter les lignes de l'autre système. Ces lignes sont bien dans un plan perpendiculaire au plan  $xOy$ . Il est facile de voir que la trace de ce plan sur  $xOy$  touche la courbe définie par les équations (1) et (2). De ces équations (1) et (2), on tire, en effet, en les différenciant,

$$d\xi = -(u' \cos \alpha + u'' \sin \alpha) dx,$$

$$d\eta = -(u' \sin \alpha + u'' \cos \alpha) dx.$$

D'où  $\frac{d\eta}{d\xi} = \tan \alpha$ . L'équation de la tangente à cette courbe est donc

$$y - \eta = (x - \xi) \tan \alpha,$$

ou bien

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = \eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha.$$

Or, en remplaçant  $\xi$  et  $\eta$  par leurs valeurs, on trouve que cette équation devient en effet

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = u'.$$

Pour trouver maintenant les rayons de courbure principaux en un point de la surface, calculons les quantités  $r = \frac{dp}{dx}$ ,  $s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ ,  $t = \frac{dq}{dy}$ , en considérant toujours  $\alpha$  et  $\beta$  comme des fonctions de  $x$  et  $y$  prises comme variables indépendantes. On a, en tenant compte des



formules précédemment trouvées,

$$\begin{aligned}
 r &= \varphi''(\beta) \cos \alpha \frac{d\beta}{dx} - \varphi'(\beta) \sin \alpha \frac{dx}{dx} \\
 &= \varphi''(\beta) \cos^2 \alpha + \frac{\varphi'(\beta) \sin^2 \alpha}{u + \beta + u''}, \\
 s &= \varphi''(\beta) \cos \alpha \frac{d\beta}{dy} - \varphi'(\beta) \sin \alpha \frac{dx}{dy} \\
 &= \varphi''(\beta) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\varphi'(\beta) \sin \alpha \cos \alpha}{u + \beta + u''}, \\
 t &= \varphi'(\beta) \sin^2 \alpha \frac{d\beta}{dy} + \varphi'(\beta) \cos \alpha \frac{dx}{dy} \\
 &= \varphi''(\beta) \sin^2 \alpha + \frac{\varphi'(\beta) \cos^2 \alpha}{u + \beta + u''}.
 \end{aligned}$$

Nous allons remplacer  $p, q, r, s, t$  par leurs valeurs dans l'équation qui donne les rayons de courbure principaux en un point d'une surface

$$\begin{aligned}
 (rt - s^2)R^2 - [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs] \\
 \times \sqrt{1 + p^2 + q^2}R + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi'(\beta)\varphi''(\beta)}{u + \beta + u''}R^2 - \left[ \varphi''(\beta) + \frac{\varphi'(\beta) + [\varphi'(\beta)]^3}{u + \beta + u''} \right] \\
 \times \sqrt{1 + [\varphi'(\beta)]^2}R + \{1 + [\varphi'(\beta)]^2\}^2 = 0.
 \end{aligned}$$

La quantité soumise au radical dans la valeur de  $R$  est

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi''^2(\beta) + 2\varphi'(\beta)\varphi''(\beta) \frac{1 + \varphi'^2(\beta)}{u + \beta + u''} \right. \\
 \left. + \varphi'^2(\beta) \frac{[1 + \varphi'^2(\beta)]^2}{(u + \beta + u'')^2} \right\} [1 + \varphi'^2(\beta)] \\
 - 4\varphi'(\beta)\varphi''(\beta) \frac{[1 + \varphi'^2(\beta)]^2}{u + \beta + u''}.
 \end{aligned}$$

C'est le carré de la quantité

$$\left\{ \varphi''(\beta) - \frac{\varphi'(\beta)[1 + \varphi'^2(\beta)]}{u + \beta + u''} \right\} \sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}.$$

Donc on a

$$R = \frac{\left[ \varphi''(\beta) + \varphi'(\beta) \frac{1 + \varphi'^2(\beta)}{u + \beta + u''} \right] \sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)} \pm \left[ \varphi''(\beta) - \varphi'(\beta) \frac{1 + \varphi'^2(\beta)}{u + \beta + u''} \right] \sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}}{\frac{2 \varphi'(\beta) \varphi''(\beta)}{u + \beta + u''}}.$$

Avec le signe +, on a

$$R_1 = \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}}{\varphi'(\beta)} (u + \beta + u'').$$

Avec le signe —, on a

$$R_2 = \frac{[1 + \varphi'^2(\beta)] \sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}}{\varphi''(\beta)}.$$

La normale à la surface fait avec  $Oz$  un angle dont le cosinus est  $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}}$ . Le cosinus de  $R_1$  avec le plan  $xOy$  est donc  $\frac{\varphi'(\beta)}{\sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}}$ , et la projection de  $R_1$  sur ce plan a pour valeur  $\frac{R_1 \varphi'(\beta)}{\sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}}$ , c'est-à-dire  $u + \beta + u''$ . C'est la valeur du rayon de courbure de la section parallèle au plan  $xOy$  donné par la formule (3). Donc  $R_1$  est la valeur du rayon de courbure des sections normales principales tangentes aux lignes de courbures parallèles au plan  $xOy$ , et  $R_2$  est par suite le rayon de courbure des sections principales de l'autre système.

---

**SOLUTION DES QUESTIONS DE LICENCE PROPOSÉES  
AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1880 ;**

PAR M. MORET-BLANC.

*1. Intégrer les équations différentielles simultanées*

$$\frac{dx}{dt} = ax + b''y + b'z,$$

$$\frac{dy}{dt} = b''x + a'y + bz,$$

$$\frac{dz}{dt} = b'x + by + a''z,$$

où  $a, a', a'', b, b', b''$  sont des constantes réelles données, et  $x, y, z$  des fonctions inconnues de la variable  $t$ .

Ces équations étant homogènes en  $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ , si l'on trouve trois systèmes de valeurs particulières  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$  qui les vérifient, on y satisfera encore en posant

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3,$$

$C_1, C_2, C_3$  étant trois constantes arbitraires. Ces nouvelles valeurs, renfermant trois constantes arbitraires, seront les intégrales générales des équations proposées.

Pour trouver trois solutions particulières, posons

$$x = e^{\lambda t}, \quad y = \mu e^{\lambda t}, \quad z = \nu e^{\lambda t},$$

$\lambda, \mu, \nu$  étant des constantes qu'il s'agit de déterminer.

Ces valeurs, substituées dans les équations, donnent, en supprimant le facteur  $e^{\rho t}$ ,

$$\begin{aligned} a - \rho + b''\mu + b'\nu &= 0, \\ b'' + (a' - \rho)\mu + b\nu &= 0, \\ b' + b\mu + (a'' - \rho)\nu &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de  $\mu$  et  $\nu$  entre ces équations donne

$$\begin{vmatrix} a - \rho & b'' & b' \\ b'' & a' - \rho & b \\ b' & b & a'' - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, identique à l'équation en  $S$  de la Géométrie analytique, a, comme on sait, ses trois racines réelles, que l'on calculera trigonométriquement, quand on connaîtra les valeurs numériques des coefficients.

Désignons-les par  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ; deux quelconques des équations précédentes donneront les valeurs correspondantes  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ ;  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ .

Les intégrales générales des équations proposées seront

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} + C_3 e^{\rho_3 t}, \\ y &= C_1 \mu_1 e^{\rho_1 t} + C_2 \mu_2 e^{\rho_2 t} + C_3 \mu_3 e^{\rho_3 t}, \\ z &= C_1 \nu_1 e^{\rho_1 t} + C_2 \nu_2 e^{\rho_2 t} + C_3 \nu_3 e^{\rho_3 t}. \end{aligned}$$

2. On considère un axe vertical  $Oz$ , autour duquel tourne d'après une loi déterminée, mais inconnue, un tube rectiligne  $OA$ , de section infiniment petite, qui rencontre l'axe fixe en  $O$  et fait avec lui un angle constant  $\theta$ ; dans l'intérieur du tube peut se mouvoir sans frottement un point  $M$  :

1° On demande quelles doivent être, d'une part, la loi de rotation du tube, de l'autre, les circonstances initiales pour que la distance  $r$  du point  $M$  au point  $O$  soit, à chaque instant  $t$ , donnée par la formule

$$r = h(t + \alpha)^2.$$



2° Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi précédemment trouvée, ne faisant d'ailleurs aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on demande d'étudier le mouvement du point pesant dans le tube.

1° L'accélération du mouvement du mobile dans le tube est la somme algébrique des composantes suivant la direction du tube, de la pesanteur et de l'accélération centrifuge : l'accélération centrifuge composée, étant perpendiculaire au tube, est détruite. On aura donc, en supposant le mobile M au-dessus du point O,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g \cos \theta + r \sin \theta \frac{d\omega^2}{dt^2},$$

$\omega$  étant l'angle que le plan ZOA fait avec sa position initiale.

Si le mobile était au-dessous du point O, il suffirait de changer le signe de  $g$ ,  $r$  étant positif de O vers M.

D'après la loi énoncée, on a

$$r = k(t + \alpha)^2, \quad \frac{dr}{dt} = 2k(t + \alpha), \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = 2k.$$

L'équation précédente devient

$$2k = -g \cos \theta + k \sin \theta (t + \alpha)^2 \frac{d\omega^2}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2k + g \cos \theta}{k \sin \theta}} \cdot \frac{1}{t + \alpha}.$$

Telle doit être la vitesse de rotation du tube; elle est en raison inverse du temps compté à partir d'une origine antérieure de  $\alpha$  aux circonstances initiales.

Pour  $t = 0$ , on doit avoir en outre

$$r_0 = k\alpha^2, \quad v_0 = \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 = 2k\alpha.$$

c'est-à-dire que la position et la vitesse initiale du mobile dans le tube doivent être les mêmes que s'il était parti sans vitesse initiale du point O avec l'accélération  $2k$ , à cette époque antérieure, le tube restant immobile.

Il est facile d'avoir l'équation de la courbe décrite sur un plan perpendiculaire à l'axe par la projection du mobile :

$$\begin{aligned}\rho &= r \sin \theta = k \sin \theta (t + \alpha)^2, \\ \omega &= \sqrt{\frac{2k + g \cos \theta}{k \sin \theta}} L \frac{t + \alpha}{\alpha},\end{aligned}$$

d'où

$$t + \alpha = \alpha e^{\omega \sqrt{\frac{k \sin \theta}{2k + g \cos \theta}}}.$$

En éliminant  $t$  entre ces deux équations, on a

$$\rho = k \alpha^2 \sin \theta e^{2\omega \sqrt{\frac{k \sin \theta}{2k + g \cos \theta}}},$$

équation d'une spirale logarithmique dont l'angle a pour tangente  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2k + g \cos \theta}{k \sin \theta}}$ .

2° Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi trouvée

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{2k + g \cos \theta}{k \sin \theta}}}{t + \alpha},$$

et ne faisant aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on a, pour déterminer le mouvement du mobile dans le tube, l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{2k + g \cos \theta}{k(t + \alpha)^2} r = -g \cos \theta.$$

On en connaît une intégrale particulière

$$r_1 = k(t + \alpha)^2;$$

on aura l'intégrale générale en lui ajoutant l'intégrale de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{2k + g \cos \theta}{k(t + \alpha)^2} r = 0.$$

Pour intégrer cette dernière équation, posons

$$r = e^{\int u dt},$$

elle devient

$$\frac{du}{dt} + u^2 = \frac{2k + g \cos \theta}{k(t + \alpha)^2},$$

ou, en posant  $t + \alpha = t_1$ ,

$$\frac{du}{dt_1} + u^2 = \frac{2 + \frac{g}{k} \cos \theta}{t_1^2},$$

équation qui rentre dans celle de Riccati.

Si l'on pose

$$u = \frac{z + 1}{t_1},$$

elle devient

$$\frac{dz}{\frac{9}{4} + \frac{g}{k} \cos \theta - \left(\frac{1}{2} + z\right)^2} = \frac{dt_1}{t_1};$$

d'où, en posant, pour abréger,  $\frac{9}{4} + \frac{g}{k} \cos \theta = m^2$ , et intégrant,

$$L \frac{m + \frac{1}{2} + z}{m - \frac{1}{2} - z} = 2m L t_1 + LC,$$

$$\frac{1}{2} + z = \frac{m(C t_1^m - t_1^{-m})}{C t_1^m + t_1^{-m}},$$

$$u dt_1 = \frac{m(C t_1^{m-1} - t_1^{-m-1}) dt_1}{C t_1^m + t_1^{-m}} + \frac{1}{2} \frac{dt_1}{t_1},$$

$$\int u dt_1 = L(C t_1^m + t_1^{-m}) + L t_1^{\frac{1}{2}} + LB,$$

$$e^{\int u dt_1} = B t_1^{\frac{1}{2}} (C t_1^m + t_1^{-m}) = e^{\int \tilde{u} dt_1},$$

C et B étant des constantes arbitraires.

Enfin, posant  $BC = A$ , on a

$$r = k(t + \alpha)^2 + A(t + \alpha)^{m + \frac{1}{2}} + B(t + \alpha)^{\left(m - \frac{1}{2}\right)},$$

$$v = \frac{dr}{dt} = 2k(t + \alpha) + \left(m + \frac{1}{2}\right)A(t + \alpha)^{m - \frac{1}{2}}$$

$$- \left(m - \frac{1}{2}\right)B(t + \alpha)^{\left(m + \frac{1}{2}\right)},$$

Si  $r_0$  et  $v_0$  sont les valeurs initiales de  $r$  et de  $v$ , on a

$$r_0 = k\alpha^2 + A\alpha^{m + \frac{1}{2}} + B\alpha^{-\left(m - \frac{1}{2}\right)},$$

$$v_0 = 2k\alpha + \left(m + \frac{1}{2}\right)A\alpha^{m - \frac{1}{2}} - \left(m - \frac{1}{2}\right)B\alpha^{-\left(m + \frac{1}{2}\right)},$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)(r_0 - k\alpha^2) + \alpha(v_0 - 2k\alpha)}{2m\alpha^{m + \frac{1}{2}}},$$

$$B = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)(r_0 - k\alpha^2) - \alpha(v_0 - 2k\alpha)}{2m\alpha^{-\left(m - \frac{1}{2}\right)}}.$$

*Discussion.* — On a

$$m > \frac{3}{2}, \quad m + \frac{1}{2} > 2, \quad m - \frac{1}{2} > 1.$$

Le terme du degré le plus élevé dans la valeur de  $r$  ou de  $v$  est donc celui qui a pour coefficient  $A$  ou  $\left(m + \frac{1}{2}\right)A$ ,

De plus,  $t$  croissant, les deux premiers termes dans les expressions de  $r$  et de  $v$  croissent, et le dernier décroît.

Donc si  $A$  est positif,  $r$  et  $v$  croîtront indéfiniment à partir de leurs valeurs initiales  $r_0$  et  $v_0$ ; le mobile montera indéfiniment avec une vitesse croissante.



Si  $A$  est négatif,  $r$  et  $v$  finiront par devenir négatifs; par conséquent, si  $r_0$  et  $v_0$  sont positifs, le mobile montera jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle; on déterminera le temps  $t_1$  correspondant, en égalant à zéro la valeur de  $\frac{dr}{dt}$ , puis on reportera cette valeur dans l'expression de  $r$ , ce qui donnera le point le plus haut. A partir de ce moment, le mobile redescendra, passera au-dessous du point  $O$ , et s'en éloignera indéfiniment vers le bas avec une vitesse croissante.

Pour établir la loi de rotation du tube, nous avons supposé que le mobile était au-dessus du point  $O$ .

S'il était au-dessous, il faudrait dans l'expression de  $\frac{d\omega}{dt}$  changer  $g$  en  $-g$ , la direction positive étant vers le bas. On aurait à faire un calcul tout à fait semblable au précédent.

## CONCOURS D'AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL EN 1880.

### ÉPREUVES ÉCRITES.

#### *Algèbre et Géométrie.*

Les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  d'un triangle sont en progression géométrique et satisfont en outre à la proportion

$$\frac{c-a}{a} = \frac{b}{c+a};$$

calculer les angles de ce triangle.

On résoudra par approximations successives l'équation numérique du problème, et l'on rendra compte des relations qu'on aura remarquées entre les angles conclus.

*Géométrie descriptive.*

On donne deux plans verticaux se rencontrant sous un angle quelconque. Par un point de leur intersection, on fait passer une série de plans coupant les deux premiers suivant deux droites perpendiculaires l'une à l'autre. Construire la trace horizontale du cône enveloppe de ces plans et reconnaître la nature de ce cône.

*Mécanique.*

Calcul d'un volant dans le cas d'une manivelle à simple effet. On suppose constantes la puissance et la résistance, et l'on ne tiendra pas compte de l'obliquité de la bielle. La machine est de dix chevaux et le nombre de tours de l'arbre est de 30 par minute, coefficient de régularité  $\frac{1}{30}$ . La vitesse du volant à sa circonférence moyenne ne doit pas dépasser 12<sup>m</sup> par seconde.

## ÉPREUVES ORALES.

*Algèbre ou Trigonométrie.*

1. Questions de maximum et de minimum.
2. Construction et usage des Tables trigonométriques en se bornant aux Tables à cinq décimales.
3. Principales formules usuelles de Trigonométrie, manière de rendre une formule calculable par logarithmes. Applications numériques. Insister sur la disposition des calculs.
4. Application de la Trigonométrie au lever des plans. (On ne reviendra pas sur la résolution des triangles qui a fait l'objet d'une leçon antérieure, et l'on indiquera le degré de précision des résultats.)
5. Première leçon de Trigonométrie.

6. Résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues. Problèmes qui conduisent à des équations de ce genre. Applications numériques.

7. Résolution des triangles quelconques.

8. Première leçon d'Algèbre.

9. Construction et usage des Tables de logarithmes.

10. Résolution des équations du premier degré à une inconnue. Problèmes qui conduisent à des équations de ce genre. Applications numériques.

11. Intérêts composés. Remboursement d'une dette par annuités. Problèmes.

### *Géométrie descriptive.*

1. Vis à filet triangulaire. Tracé. Ombres. Construction et applications industrielles de ces vis.

2. Ombres de la niche. Indications pour le lavis.

3. Premières notions de perspective. Perspective d'une figure située dans un plan horizontal.

4. Des surfaces gauches en général. Classification de ces surfaces d'après leurs modes de génération.

Manière de les construire dans les arts. Passer en revue leurs principales applications.

5. Des surfaces de révolution. Manière de les produire dans les arts. Principales surfaces de ce genre usitées dans les arts.

6. Des surfaces développables en général. Classification de ces surfaces. Manière de les produire dans les arts. Passer en revue leurs principales applications.

7. Intersection des deux cylindres. Application aux arts.

8. Perspective d'une porte avec perron.

9. Vis à filet carré. Tracé, ombres, usages industriels, fabrication industrielle de ces vis.

10. Sections planes des principales surfaces gauches.

11. Porte en talus, rachetant une voûte cylindrique.

### *Mécanique.*

1. Lois du frottement. Frein de Prony.

2. Locomotives.

3. Roues hydrauliques à axe vertical.

4. Théorie des engrenages. Application à un cas particulier au choix du candidat.

5. Du travail des forces. Force vive.

Équivalent mécanique de la chaleur.

6. Rotation des corps. Force centrifuge.

7. Étude des mouvements uniformément accélérés.

Chute des corps. Mouvement des projectiles.

8. Roues hydrauliques à axe horizontal.

9. Machines à vapeur à basse pression.

10. Détente de la vapeur. Moyens de la produire.

11. Mouvements relatifs. Principe de l'indépendance des mouvements simultanés. Applications diverses.

### ÉPREUVES PRATIQUES.

1. Lavis de la perspective du trou de loup (4<sup>h</sup>).

2. Détermination des coordonnées du Trocadéro (4<sup>h</sup>).

3. Lever de machines à l'usine Cail (4<sup>h</sup>).

Mise au net au lycée Saint-Louis (3<sup>h</sup>).

---

### QUESTIONS.

1400. On donne un triangle ABC et un point quelconque O. On prend les symétriques  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de ce point par rapport aux milieux de BC, AC, AB. Démontrer : 1° que les droites  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$  concourent en un même point P ;



2° que la droite OP tourne autour d'un point fixe E, lorsque le point O se meut d'une façon quelconque;  
 3° que le point E divise OP dans un rapport constant.

(D'OCAGNE.)

1401. Soit  $q_p$  le quotient de la division de  $n$  par  $p$ .  
 On a

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_n^2 \\ = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + \dots + (2n-1)q_n. \\ \text{(E. CÉSARO.)}$$

1402. La somme des  $p^{\text{ièmes}}$  puissances des diviseurs de  $n$  est égale, en moyenne; à

$$n^p \left( 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \dots \right). \\ \text{(E. CÉSARO.)}$$

1403.  $a, b, c, \dots$  étant les diviseurs de  $n$ , on a, en moyenne,

$$\frac{p}{a+p} + \frac{p}{b+p} + \frac{p}{c+p} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}. \\ \text{(E. CÉSARO.)}$$

## ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 398, première colonne *Diff.*, première ligne en remontant, au lieu de 330, lisez 331.

Page 412, troisième colonne *Diff.*, première ligne en remontant, au lieu de 146, lisez 147.

Ces fautes ont été signalées par M. P. Barbarin, professeur de Mathématiques au lycée de Toulon.

# SUR LE DÉVELOPPEMENT DES LOGARITHMES ET DES EXPONENTIELLES ;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève de l'École Polytechnique.

Considérons le développement d'une fonction  $f(x)$  suivant les puissances ascendantes d'une fonction quelconque  $\varphi(x)$  de la variable

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) \\ \quad + A_2 \varphi(x)^2 + \dots + A_n \varphi(x)^n + \dots, \end{cases}$$

et proposons-nous de trouver le développement de  $\log f(x)$  suivant les puissances de  $\varphi(x)$

$$(2) \quad \begin{cases} \log f(x) = a_0 + a_1 \varphi(x) \\ \quad + a_2 \varphi(x)^2 + \dots + a_n \varphi(x)^n + \dots, \end{cases}$$

en supposant ces deux développements convergents pour la fonction  $\varphi(x)$  choisie.

On voit d'abord immédiatement que

$$a_0 = \log A_0.$$

Cherchons maintenant la valeur d'un coefficient quelconque  $a_n$ . A cet effet, dérivons l'expression (1) par rapport à  $x$

$$f'(x) = A_1 \varphi'(x) + 2 A_2 \varphi(x) \varphi'(x) + \dots \\ + n A_n \varphi(x)^{n-1} \varphi'(x) + \dots$$

Par suite,

$$(3) \quad \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'(x) [A_1 + 2 A_2 \varphi(x) + \dots + n A_n \varphi(x)^{n-1} + \dots]}{A_0 + A_1 \varphi(x) + \dots + A_n \varphi(x)^n + \dots} \right\}.$$

Dérivons maintenant l'expression (2) par rapport à  $x$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log f(x)}{dx} &= a_1 \varphi'(x) + 2 a_2 \varphi(x) \varphi'(x) + \dots \\ &\quad + n a_n \varphi(x)^{n-1} \varphi'(x) + \dots \end{aligned} \right.$$

Les premiers membres de (3) et (4) étant identiques, il en est de même des seconds; nous aurons donc, après avoir divisé de part et d'autre par  $\varphi'(x)$ ,

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_2\varphi(x) + \dots + nA_n\varphi(x)^{n-1} + \dots \\ = [a_1 + 2a_2\varphi(x) + \dots + na_n\varphi(x)^{n-1} + \dots] \\ \times [A_0 + A_1\varphi(x) + \dots + A_n\varphi(x)^n + \dots]. \end{aligned}$$

L'identification des deux membres donne

$$[x] \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_1 A_0, \\ 2A_2 = 2a_2 A_0 + a_1 A_1, \\ 3A_3 = 3a_3 A_0 + 2a_2 A_1 + a_1 A_2, \\ \dots\dots\dots, \\ nA_n = na_n A_0 + (n-1)a_{n-1} A_1 \\ \quad + (n-2)a_{n-2} A_2 + \dots + a_1 A_{n-1}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Pour tirer de là la valeur de  $a_n$ , prenons les  $n$  premières équations et écrivons-les comme suit

$$\begin{array}{cccccc} A_0 a_1 & + 0 a_2 & + 0 a_3 & + \dots + 0 a_n & = & A_1, \\ A_1 a_1 & + 2 A_0 a_2 & + 0 a_3 & + \dots + 0 a_n & = & 2 A_2, \\ A_2 a_1 & + 2 A_1 a_2 & + 3 A_0 a_3 & + \dots + 0 a_n & = & 3 A_3, \\ \dots\dots\dots & & & & & \\ A_{n-1} a_1 & + 2 A_{n-2} a_2 & + 3 A_{n-3} a_3 & + \dots + n A_0 a_n & = & n A_n. \end{array}$$

De là nous tirerons pour la valeur de  $a_n$ , en remarquant que le déterminant qui forme le dénominateur se réduit à sa diagonale,

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ A_1 & 2A_0 & 0 & \dots & 0 & 2A_2 \\ A_2 & 2A_1 & 3A_0 & \dots & 0 & 3A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-2} & 2A_{n-3} & 3A_{n-4} & \dots & (n-1)A_0 & (n-1)A_{n-1} \\ A_{n-1} & 2A_{n-2} & 3A_{n-3} & \dots & (n-1)A_1 & nA_n \end{vmatrix}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n A_0^n}.$$

Telle est la formule qui résout le problème.

Comme application, nous allons en déduire le développement classique de  $\log(1+x)$ .

Dans ce cas, nous avons

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1.$$

Tous les autres coefficients  $A$  sont nuls. Nous avons alors

$$a_0 = \log A_0 = 0,$$

et, par application de la formule précédente,

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\ = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

C'est bien la formule connue.

Il est parfois plus facile de développer le logarithme d'une fonction que cette fonction elle-même; c'est ce qui a lieu en particulier pour le développement de l'intégrale eulérienne  $\Gamma(x)$ , suivant les puissances croissantes de  $(x-1)$ . On peut donc avoir à traiter le problème inverse de celui que nous venons de résoudre. On a d'abord

$$A_0 = e^{a_0}.$$

Il faut maintenant des équations  $[x]$  tirer la valeur de  $A_n$  en fonction des  $a$ . A cet effet, nous prendrons les



$n$  premières de ces équations et nous les écrivons

$$\begin{array}{rcl}
 A_1 + & 0 A_2 + & 0 A_3 + \dots + 0 A_n = a_1 A_0 \\
 - a_1 A_1 + & 2 A_2 + & 0 A_3 + \dots + 0 A_n = 2 a_2 A_0 \\
 - 2 a_2 A_1 - & a_1 A_2 + & 3 A_3 + \dots + 0 A_n = 3 a_3 A_0 \\
 \dots\dots\dots & & \\
 -(n-1) a_{n-1} A_1 - (n-2) a_{n-2} A_2 - (n-3) a_{n-3} A_3 + \dots + n A_n = n a_n A_0
 \end{array}$$

d'où nous tirons

$$A_n = \frac{
 \begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\
 -a_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2a_2 \\
 -2a_2 & -a_1 & 3 & \dots & 0 & 3a_3 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots \\
 -(n-2)a_{n-2} & -(n-3)a_{n-3} & -(n-4)a_{n-4} & \dots & n-1 & (n-1)a_{n-1} \\
 -(n-1)a_{n-1} & -(n-2)a_{n-2} & -(n-3)a_{n-3} & \dots & -a_1 & na_n
 \end{array}
 }{1.2.3\dots n}$$

Comme vérification de cette formule, nous allons en déduire le développement de  $e^x$ . Il suffit de faire

$$a_1 = 1,$$

et tous les autres  $a$  nuls, ce qui donne

$$A_n = \frac{
 \begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0
 \end{array}
 }{1.2.3\dots n} = \frac{1}{1.2.3\dots n},$$

qui est bien la formule connue.

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES  
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879 ;**

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

*On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un parabololoïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe par le point A; soit M le point d'intersection de ce parabololoïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point A; soit Q le point de rencontre du plan P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde.*

*Le plan P tournant autour du point A, on demande :*

*1° Le lieu du point M;*

*2° Le lieu du point Q : ce second lieu est une surface du second degré S que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace;*

*3° Le lieu des positions que doit occuper le point A pour que la surface S soit de révolution.*

L'hyperboloïde donné, rapporté à son centre et à ses axes, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

si je transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, de manière que la nouvelle origine soit au point donné A ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), l'équation précédente deviendra

$$(1) \quad \frac{(x + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + \beta)^2}{b^2} - \frac{(z + \gamma)^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Celle du plan P sera

$$lx + my + nz = 0,$$

$l, m, n$  étant des paramètres arbitraires.

Si je désigne, pour abréger, par S le premier membre de (1), l'équation d'une surface du second ordre, circonscrite à l'hyperboloïde suivant la courbe de contact déterminée par le plan P dans cet hyperboloïde, sera

$$\lambda S - (lx + my + nz)^2 = 0,$$

et, pour qu'elle représente un paraboloides, on a la condition

$$\lambda^2(a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2 - \lambda) = 0.$$

Le facteur  $\lambda^2$ , égalé à zéro, donnerait un plan double. L'autre facteur donne

$$\lambda = a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2,$$

et l'équation du paraboloides devient alors

$$(2) \quad (a^2l^2 + b^2m^2 - c^2n^2) S - (lx + my + nz)^2 = 0.$$

I. *Lieu du point M.* — Les diamètres du paraboloides (2) étant conjugués du plan P, celui qui passe en A a pour équations

$$(3) \quad \frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = -\frac{z}{c^2}.$$

Le lieu du point M où le diamètre (3) rencontre le paraboloides (2) s'obtiendra en éliminant  $l, m$  et  $n$  entre les équations (2) et (3), ce qui se fait immédiatement en substituant à ces paramètres les quantités proportionnelles  $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -\frac{z}{c^2}$ .

L'équation obtenue se décompose en deux autres.

savoir :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

La première représente le cône asymptote de l'hyperboloïde donné, transporté parallèlement à lui-même de manière que son sommet vienne en A. C'est une solution singulière correspondant au cas de  $\lambda = 0$ .

Le plan représenté par la seconde équation est parallèle au plan polaire du point A par rapport à l'hyperboloïde et se confond avec le plan tangent en A à cette surface, quand le point A est sur l'hyperboloïde.

Si le point A est situé au centre de l'hyperboloïde, ce deuxième lieu est rejeté à l'infini.

II. *Lieu du point Q.*— Soient  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées d'un des points M du lieu précédent, et  $x_1, y_1, z_1$  celles du pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde donné.

Les équations de la droite qui joint ce pôle au point M sont

$$(4) \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Cette droite rencontre le plan qui a pour équation

$$(5) \quad lx + my + nz = 0$$

en un point qui appartient au lieu cherché.

Mais, si l'on identifie l'équation (5) avec celle du plan polaire du point  $(x_1, y_1, z_1)$  par rapport à l'hyperboloïde, on obtient les relations

$$(6) \quad \frac{x_1 + \alpha}{a^2 l} = \frac{y_1 + \beta}{b^2 m} = \frac{z_1 + \gamma}{-c^2 n},$$

$$(7) \quad \frac{\alpha(x_1 + \alpha)}{a^2} + \frac{\beta(y_1 + \beta)}{b^2} - \frac{\gamma(z_1 + \gamma)}{c^2} - 1 = 0,$$



et l'on a en outre

$$(8) \quad \frac{x_0}{a^2 l} = \frac{y_0}{b^2 m} = \frac{z_0}{c^2 n},$$

$$(9) \quad \frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2} - \frac{2\gamma z_0}{c^2} + k = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = k.$$

Il faut éliminer les coordonnées de M, celles du pôle du plan P et les rapports de deux des coefficients  $l, m, n$  au troisième, entre les équations numérotées de (4) à (9).

De (6) et (8) on déduit immédiatement

$$\frac{x_1 + \alpha}{x_0} = \frac{y_1 + \beta}{y_0} = \frac{z_1 + \gamma}{z_0},$$

ce qui exige, pour que les équations (7) et (9) soient compatibles, que l'on ait encore

$$2x_0 + k(x_1 + \alpha) = 0.$$

$$2y_0 + k(y_1 + \beta) = 0,$$

$$2z_0 + k(z_1 + \gamma) = 0.$$

Tirant de là les valeurs de  $x_1, y_1, z_1$  en fonction de  $x_0, y_0, z_0$  et substituant dans les équations (4), on en déduit, si l'on désigne par  $\frac{1}{\mu}$  la valeur commune des trois rapports (4),

$$(10) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{k}{k(\mu - 1) - 2} (\mu x + \alpha), \\ y_0 = \frac{k}{k(\mu - 1) - 2} (\mu y + \beta), \\ z_0 = \frac{k}{k(\mu - 1) - 2} (\mu z + \gamma). \end{cases}$$

D'autre part, si l'on substitue à  $l, m, n$  dans (5) les

quantités proportionnelles  $\frac{x_0}{a^2}$ ,  $\frac{\gamma_0}{b^2}$  et  $\frac{z_0}{c^2}$ , il vient

$$(11) \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{\gamma \gamma_0}{b^2} - \frac{z z_0}{c^2} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à porter dans (9) et (11) les valeurs (10) de  $x_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $z_0$  pour obtenir les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta \gamma}{b^2} - \frac{2\gamma z}{c^2} + k \right) \mu + k &= 0, \\ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \mu + \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} &= 0, \end{aligned}$$

entre lesquelles  $\mu$  s'élimine immédiatement. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} \right)^2 \\ = \frac{k}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta \gamma}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Le lieu du point Q est donc une surface du second ordre. Cette surface passe par le point A et par la courbe d'intersection du cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

et du plan

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} + \frac{k}{2} = 0.$$

Elle se réduit à un plan double quand on a  $k = 0$ .

Nous supposons dans ce qui suit  $k$  différent de zéro.

*Discussion.* — L'équation développée du lieu du point Q peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\alpha^2}{a^2} - k \right) \frac{x^2}{a^2} + \left( \frac{2\beta^2}{b^2} - k \right) \frac{\gamma^2}{b^2} \\ + \left( \frac{2\gamma^2}{c^2} + k \right) \frac{z^2}{c^2} - \frac{4\beta\gamma}{b^2 c^2} \gamma z \\ - \frac{4\gamma\alpha}{c^2 a^2} z x + \frac{4\alpha\beta}{a^2 b^2} x \gamma + k \left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Les équations du centre se ramènent aisément à celles-ci

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = -\frac{k}{2(k+2)}.$$

Le centre de la surface S est donc situé sur la droite qui joint le point A au centre de l'hyperboloïde donné.

Supposons l'équation de S ramenée à la forme

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 = H,$$

et calculons le terme connu H. Nous obtiendrons facilement

$$H = \frac{k^2(k+1)}{4(k+2)}.$$

Il faut maintenant déterminer les signes des coefficients  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , qui sont, comme on sait, les racines de l'équation en S.

Prenons cette équation sous la forme connue

$$\frac{1}{B^2(S-a_1)} + \frac{1}{B'^2(S-b_1)} + \frac{1}{B''^2(S-c_1)} - \frac{1}{BB'B''} = 0,$$

où nous faisons

$$A = \frac{B'B''}{B} = a_1, \quad A' = \frac{B''B}{B'} = b_1 \quad \text{et} \quad A'' = \frac{BB'}{B''} = c_1.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, nous avons

$$a_1 = -\frac{k}{a^2}, \quad b_1 = -\frac{k}{b^2}, \quad c_1 = \frac{k}{c^2},$$

et l'équation en S devient

$$(12) \quad \frac{\frac{x^2}{a^2}}{S + \frac{k}{a^2}} + \frac{\frac{y^2}{b^2}}{S + \frac{k}{b^2}} + \frac{\frac{z^2}{c^2}}{S - \frac{k}{c^2}} - \frac{1}{2} = 0.$$

Supposons  $a^2 > b^2$  et distinguons les deux cas de  $k > 0$  et  $k < 0$ .

1<sup>o</sup>  $k > 0$ . — En faisant varier  $S$  de  $-\frac{k}{b^2} + \varepsilon$  à  $-\frac{k}{a^2} - \varepsilon'$ ,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  étant des quantités très petites, le premier membre de l'équation (12) passe du positif au négatif en restant fini et continu; il y a donc une racine négative comprise entre  $-\frac{k}{b^2}$  et  $-\frac{k}{a^2}$ . Si  $S$  varie ensuite de zéro à  $\frac{k}{c^2} - \varepsilon''$ , le premier membre de (12) varie de  $\frac{k+2}{2k}$ , quantité positive, jusqu'à une quantité négative; il y a donc une racine positive entre zéro et  $\frac{k}{c^2}$ . Enfin on s'assure aisément qu'il y a une autre racine positive supérieure à  $\frac{k}{c^2}$ . Comme le terme  $H$  est alors positif, la surface  $S$  est un *hyperboloïde à une nappe*.

2<sup>o</sup>  $k < 0$ . — Il y a une première racine entre  $\frac{k}{c^2}$  et  $-\frac{k}{a^2}$ . Pour déterminer son signe, faisons  $S = 0$ . Le premier membre de (12) devient  $\frac{k+2}{2k}$ . Si l'on a

$$k + 2 < 0,$$

cette quantité étant alors positive, la racine considérée est négative. Il y a en outre une racine positive entre  $-\frac{k}{a^2}$  et  $-\frac{k}{b^2}$ , et une autre, aussi positive, plus grande que  $-\frac{k}{b^2}$ . Cette dernière reste positive quel que soit le signe de  $k + 2$ . Donc, pour  $k + 2 < 0$ , les trois racines de l'équation en  $S$  sont positives, et comme alors  $H$  est aussi positif, la surface est un *ellipsoïde réel*.

Mais, pour  $k + 2 > 0$ , deux racines étant positives et l'autre négative, comme on a alors  $H > 0$  si  $k + 1 > 0$ ,



et  $H < 0$  si  $k + 1 < 0$ , il en résulte que la surface est un *hyperboloïde à une nappe* si  $k + 1 > 0$ , et un *hyperboloïde à deux nappes* si  $k + 1 < 0$ .

Pour  $k + 1 = 0$ , la surface est un *cône réel*.

Il reste à examiner l'hypothèse  $k + 2 = 0$ .

Dans ce cas, le centre est à l'infini sur la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

La surface est alors un *paraboloïde*.

Pour  $z = 0$ , le premier membre de l'équation de la surface  $S$  devient

$$\left( \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} \right)^2 = \frac{k}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta \gamma}{b^2} \right),$$

équation d'une ellipse dans l'hypothèse de  $k = -2$ .  
Donc la surface est alors un *paraboloïde elliptique*.

*Remarque.* — Dans la discussion qui précède, la surface  $S$  se trouve rapportée à des axes de directions fixes, mais dont l'origine est variable : cela ne peut en rien changer la nature de la surface discutée.

*Interprétation géométrique du résultat de la discussion.* — Revenons aux axes primitifs de coordonnées par rapport auxquels nous regarderons  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  comme des coordonnées courantes. La relation  $k + 1 = 0$  représente alors le cône asymptote de l'hyperboloïde donné et la relation  $k + 2 = 0$  son hyperboloïde conjugué.

Donc :

Si le point  $A$  est situé à l'extérieur du cône asymptote de l'hyperboloïde donné, la surface  $S$  est un *hyperboloïde à une nappe*;

Si ce point est sur le cône asymptote, la surface  $S$  est un *cône réel*;

S'il est situé à l'intérieur du cône asymptote, mais, par

rapport à l'hyperboloïde conjugué de l'hyperboloïde donné, dans la même région que le centre, la surface S est un *hyperboloïde à deux nappes*;

S'il se trouve sur l'hyperboloïde conjugué, la surface S est un *paraboloïde elliptique*;

Enfin, si le point A est, par rapport à l'hyperboloïde conjugué, dans la région où ne se trouve pas le centre, la surface S est un *ellipsoïde réel*.

Il a déjà été dit que, si le point A est sur l'hyperboloïde donné, la surface S est un plan double.

III. *Conditions pour que la surface S soit de révolution.* — Les trois quantités  $a_1, b_1, c_1$  ne pouvant être égales que si  $k = 0$ , auquel cas elles sont nulles, il faut exprimer que deux des coefficients des rectangles des variables sont nuls à la fois. Cela arrivera pour  $\gamma = 0$ , par exemple. Mais on doit avoir en outre la relation

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{a^2b^2} = \left[ \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{\alpha^2}{a^2} + \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\beta^2}{b^2} + \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right] \\ \times \left[ - \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\alpha^2}{a^2} + \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right],$$

qui, abstraction faite d'un facteur constant, se décompose en deux, savoir

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La première rentre dans l'hypothèse  $k = 0$ . La seconde représente une conique dans le plan des  $\alpha\beta$ .

Les hypothèses  $\beta = 0$  et  $\alpha = 0$  donneraient deux autres coniques ayant pour équation dans leur plan

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0, \\ - \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0.$$

En supposant  $a^2 > b^2$ , nous aurons à distinguer les trois cas de

$$c^2 < b^2, \quad b^2 < c^2 < a^2, \quad a^2 < c^2.$$

1°  $c^2 < b^2$ . — Les coniques situées dans les plans des  $\alpha\beta$  et des  $\alpha\gamma$  sont des ellipses réelles, et celle qui est située dans le plan des  $\beta\gamma$  est une hyperbole.

2°  $b^2 < c^2 < a^2$ . — Les trois coniques sont des hyperboles.

3°  $a^2 < c^2$ . — Les coniques situées dans les plans des  $\alpha\beta$  et des  $\beta\gamma$  sont des ellipses imaginaires; celle qui est située dans le plan des  $\alpha\gamma$  est une hyperbole.

*Note.* — M. Gambey a également résolu la question de licence dont une solution a déjà paru (2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 57).

## SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879;

PAR M. GAMBÉY.

*Une lame homogène, pesante, et d'une épaisseur infiniment petite, a la forme d'un demi-cercle ABC; elle est soutenue par un fil attaché aux extrémités du diamètre AB, et qui passe dans un anneau fixe infiniment petit O.*

*On demande de déterminer les positions d'équilibre de la lame et de reconnaître dans quels cas cet équilibre est stable ou instable.*

*On donne la longueur  $l$  du fil, le rayon  $R$  du demi-cercle ACB et le poids  $P$  de la lame.*

*(On négligera le poids du fil.)*

*NOTA.* — *Pour reconnaître si l'équilibre est stable ou instable, on pourra chercher pour quelles positions de la lame la distance du centre de gravité G de cette lame*

au plan horizontal qui passe par l'anneau O est un maximum ou un minimum.

On reconnaît aisément que la verticale du point de suspension doit faire des angles égaux avec les deux brins du fil.

Cela posé, traçons AG, BG, OG. Les triangles AOG, BOG donnent

$$\frac{OG}{\sin \widehat{OAG}} = \frac{AG}{\sin \widehat{AOG}} = \frac{BG}{\sin \widehat{BOG}} = \frac{OG}{\sin \widehat{OBG}},$$

d'où

$$\sin \widehat{OAG} = \sin \widehat{OBG}$$

et, par suite,

$$\widehat{OAG} = \widehat{OBG};$$

par conséquent

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

ou bien

$$\widehat{OAG} + \widehat{OBG} = 180^\circ,$$

et le quadrilatère OAGB est inscriptible.

Il y a donc trois positions d'équilibre, dont deux sont symétriques par rapport à la verticale du point de suspension.

*Autrement.* — La recherche des positions d'équilibre de la figure pesante revient à construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. La discussion est connue et l'on retrouve le résultat précédent.

On a, dans le quadrilatère inscriptible OAGB,

$$OG \cdot 2R = BG \times AO + AG \times BO = AG \times l.$$

d'où

$$OG = \frac{AG \times l}{2R},$$



et comme, dans tout quadrilatère OAGB, on a

$$OG \times AB < BG \times AO + AG \times BO,$$

il en résulte que OG est maximum quand le quadrilatère OAGB est inscriptible. Par suite, les positions d'équilibre, symétriques de la verticale du point de suspension, sont des positions d'équilibre stable. La troisième est par suite instable.

*Note.* — La même question a été résolue par M. E. Fauquembergue.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. E. DORLET.

Élève du lycée de Dijon.

*Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points  $A_{-n}, A_{-(n-1)}, \dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ , tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :*

1<sup>o</sup> *Étant données les coordonnées du point  $A_0$ , on propose de trouver les coordonnées des points  $A_{-n}, A_n$ , et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice  $n$  augmente indéfiniment.*

2<sup>o</sup> *On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.*

3<sup>o</sup> *On étudiera comment varient les points d'intersec-*

tion de ce lieu et des côtés du triangle PQR, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par le point O.

1° L'équation d'une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement à l'origine et pour tangente en ce point l'axe des  $x$  est

$$\beta y^2 - x^3 = 0,$$

en posant, pour abrégér,

$$\beta = Ax + By + C.$$

$$\alpha = x + my.$$

Le point  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , où  $\beta = 0$  a avec la courbe trois points communs coïncidents est le point d'inflexion et  $\beta = 0$  la tangente en ce point.

Les équations

$$\frac{y}{\alpha} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \lambda^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\beta}{\lambda^3} = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{y}{1},$$

prises simultanément, représentent un point de la courbe. Nous désignerons par  $x_p$ ,  $y_p$  les coordonnées de  $A_p$ , par  $\alpha_p$ ,  $\beta_p$ ,  $\lambda_p$  les valeurs correspondantes de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ .

L'équation de la tangente au point  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  est

$$-3\alpha\alpha_0^2 + \beta y_0^2 + 2y\beta_0 y_0 = 0,$$

ou

$$2\lambda_0^3 y - 3\lambda_0^2 \alpha + \beta_0 = 0.$$

Les coordonnées de  $A_1$  devront satisfaire à la relation

$$2\lambda_0^3 y_1 - 3\lambda_0^2 \alpha_1 + \beta_1 = 0,$$

ou

$$2\lambda_0^3 - 3\lambda_0^2 \lambda_1 + \lambda_1^3 = 0,$$

d'où, en supprimant le facteur  $(\lambda_1 - \lambda_0)^2$ ,

$$\lambda_1 + 2\lambda_0 = 0.$$

De même

$$\begin{aligned} \lambda_2 + 2\lambda_1 &= 0, & \lambda_0 + 2\lambda_{-1} &= 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \\ \lambda_n + 2\lambda_{n-1} &= 0, & \lambda_{-n+1} + 2\lambda_{-n} &= 0. \end{aligned}$$

On déduit, en éliminant les  $\lambda$  intermédiaires,

$$\lambda_n = (-2)^n \lambda_0, \quad \lambda_{-n} = \frac{\lambda_0}{(-2)^n}.$$

Les coordonnées du point qui correspond à  $\lambda$  sont données par

$$Ax + By + C = \lambda^3 \gamma,$$

$$x + m\gamma = \lambda \gamma,$$

d'où

$$(\lambda^3 - A\lambda + Am - B)\gamma = C,$$

$$(\lambda^3 - A\lambda + Am - B)x = C(\lambda - m).$$

En appliquant au point  $A_n$ , et remplaçant, dans le résultat considéré comme homogène en  $\lambda_n^3$ ,  $\lambda_n$  et 1, ces trois quantités par  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$  et  $\gamma_0$ , on aura

$$\begin{aligned} [(-2)^{3n}\beta_0 - (-2)^n A\alpha_0 + (Am - B)\gamma_0]\gamma_n &= C\gamma_0, \\ [(-2)^{3n}\beta_0 - (-2)^n A\alpha_0 + (Am - B)\gamma_0]x_n & \\ &= C[(-2)^n\alpha_0 - m\gamma_0]. \end{aligned}$$

En remplaçant  $n$  par  $-n$ , on aura les coordonnées de  $A_{-n}$ .

Lorsque  $n$  croît indéfiniment,  $\lambda_n$  croît indéfiniment en valeur absolue, et  $\lambda_{-n}$  tend vers zéro; les droites  $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda_n^2$  et  $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\lambda_n}$ ,  $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda_{-n}^2$  et  $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{-n}}$  tendent respectivement vers les droites  $\alpha = 0$  et  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 0$  et  $\alpha = 0$ ; le point  $A_n$  tend vers le point O, et le point  $A_{-n}$  vers le point d'inflexion de la courbe, intersection des droites  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ .

2° Soient  $(p, p')$ ,  $(q, q')$ ,  $(r, r')$  les coordonnées des trois points P, Q, R. En prenant, avec les trois conditions qui expriment que la courbe passe par ces points, les deux équations  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ , on a les équations qui donnent un point quelconque du lieu,

$$(Ap + Bp' + C)p'^2 - (p + mp')^3 = 0,$$

$$(Aq + Bq' + C)q'^2 - (q + mq')^3 = 0,$$

$$(Ar + Br' + C)r'^2 - (r + mr')^3 = 0,$$

$$Ax + By + C = 0,$$

$$x + my = 0;$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de  $m$ ,

$$Ax + By + C = 0,$$

$$Ap + Bp' + C - \frac{(p.y - p'.x)^3}{p'^2 y^3} = 0,$$

$$Aq + Bq' + C - \frac{(q.y - q'.x)^3}{q'^2 y^3} = 0,$$

$$Ar + Br' + C - \frac{(r.y - r'.x)^3}{r'^2 y^3} = 0.$$

En éliminant A, B, C, et supprimant le facteur  $\frac{1}{y^3}$ , on a l'équation du lieu

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ \frac{(p.y - p'.x)^3}{p'^2} & p & p' & 1 \\ \frac{(q.y - q'.x)^3}{q'^2} & q & q' & 1 \\ \frac{(r.y - r'.x)^3}{r'^2} & r & r' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que la courbe passe par les trois points P, Q, R. L'équation est du quatrième degré; mais elle est vérifiée pour  $y = 0$  (l'hypothèse  $y = 0$  rend proportionnels les éléments de la première et de la troi-



sième colonne). En ajoutant à la première colonne la troisième multipliée par  $x^3$ , on met en évidence le facteur  $y$ ; après l'avoir supprimé, ajoutons à la première colonne la seconde multipliée par  $-3x^2$ . Il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} -3x^3 & x & y & 1 \\ \frac{p^2}{p'} y \left( \frac{p}{p'} y - 3x \right) & p & p' & 1 \\ \frac{q^2}{q'} y \left( \frac{q}{q'} y - 3x \right) & q & q' & 1 \\ \frac{r^2}{r'} y \left( \frac{r}{r'} y - 3x \right) & r & r' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les termes de moindre degré sont

$$\begin{vmatrix} \frac{p^2}{p'} y \left( \frac{p}{p'} y - 3x \right) & p & p' \\ \frac{q^2}{q'} y \left( \frac{q}{q'} y - 3x \right) & q & q' \\ \frac{r^2}{r'} y \left( \frac{r}{r'} y - 3x \right) & r & r' \end{vmatrix}.$$

En mettant  $y$  en facteur, divisant par  $p'q'r'$ , de manière à avoir partout l'unité dans la troisième colonne, puis retranchant la troisième ligne successivement de la première et de la seconde, et développant le déterminant, on trouve pour l'équation des tangentes à l'origine, qui est un point double,

$$\left( \frac{q}{q'} - \frac{r}{r'} \right) \left( \frac{r}{r'} - \frac{p}{p'} \right) \left( \frac{p}{p'} - \frac{q}{q'} \right) y \left[ \left( \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'} \right) y - 3x \right] = 0.$$

Si deux des points P, Q, R sont en ligne droite avec l'origine, le facteur  $\left( \frac{q}{q'} - \frac{r}{r'} \right) \left( \frac{r}{r'} - \frac{p}{p'} \right) \left( \frac{p}{p'} - \frac{q}{q'} \right)$  s'annule; du reste, ce facteur n'entre pas dans les termes du troisième degré; le coefficient du terme en  $x^3$  par exemple,

qui est le déterminant  $\begin{vmatrix} p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$ , ne s'annule pas pour

$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$ . L'équation représente donc dans ce cas trois droites passant par O. Il n'y a pas lieu du reste d'examiner ce cas, car si les deux points P et Q sont en ligne droite avec O, il n'y a pas de véritable courbe du troisième degré remplissant les conditions énoncées.

Dans le cas général, le lieu est donc une courbe du troisième degré admettant à l'origine un point double où les tangentes sont OX et la droite  $x = \frac{1}{3} \left( \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'} \right)$ , qui joint le point O au centre de gravité des trois points déterminés sur une parallèle à OX par les droites OP, OQ, OR, ou, ce qui revient au même, au centre des moyennes harmoniques des points déterminés par ces droites sur une droite quelconque, par rapport à son point d'intersection avec OX.

3<sup>e</sup> Cherchons le troisième point d'intersection avec la courbe de la droite QR dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous prendrons l'équation de la courbe sous la première forme, sauf à écarter plus tard la solution  $y = 0$ . En développant par rapport aux éléments de la première colonne et tenant compte de l'équation de QR, on a

$$\frac{(qy - q'x)^3}{q'^2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & p' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix} - \frac{(ry - r'x)^3}{r'^2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{[q(y - q') - q'(x - q)]^3}{q'^2} \begin{vmatrix} x - r & y - r' \\ p - r & p' - r' \end{vmatrix} \\ = \frac{[r(y - r') - r'(x - r)]^3}{r'^2} \begin{vmatrix} x - q & y - q' \\ p - q & p' - q' \end{vmatrix}.$$

De l'équation de QR on déduit

$$x - r = (y - r') \frac{q - r}{q' - r'},$$

$$x - q = (y - q') \frac{q - r}{q' - r'}.$$

En substituant, et supprimant  $(y - r')$   $(y - q')$ , on a

$$\frac{(qr' - q'r)^3}{q'^2} (y - q')^2 \begin{vmatrix} q & q' & 1 \\ p & p' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix} \\ = \frac{(rq' - qr')^3}{r'^2} (y - r')^2 \begin{vmatrix} r & r' & 1 \\ p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \end{vmatrix};$$

$qr' - q'r$  est supposé différent de zéro. En supposant aussi

$$\begin{vmatrix} p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

on aura

$$y \frac{y - q'}{q'} = \pm \frac{y - r'}{r'},$$

d'où, en supprimant la solution  $y = 0$ ,

$$y \left( \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} \right) = 2,$$

ou

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}.$$

On voit que le point cherché est le conjugué harmon-

niq   du point où la droite QR coupe OX par rapport au segment QR. Si les points Q et R parcourent deux droites issues d'un point quelconque de OX, quel que soit d'ailleurs le lieu de P, le troisième point d'intersection de la courbe avec QR décrira une droite qui sera la conjuguée harmonique de OX par rapport aux deux premières. Si les points P, Q, R décrivent trois droites issues de O, les points d'intersection de la courbe avec les côtés de PQR décrivent chacun une droite issue de O.

Nous avons supposé le déterminant  $\begin{vmatrix} p & p' & 1 \\ q & q' & 1 \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$  diff  rent de zéro. Si les points P, Q, R sont en ligne droite, ce déterminant est nul, et par conséquent la droite PQR fait partie du lieu. C'est ce qu'on voit directement sur l'équation, en développant par rapport aux éléments de la première colonne. Outre cela, le lieu comprendra une ligne du second degré ayant un point double en O, et qui se réduira nécessairement aux deux tangentes en ce point, c'est-  dire aux droites OX et

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \left( \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'} \right).$$

Les droites OX et PQR doivent être considérées comme des solutions étrangères, car si une courbe du troisième degré, passant par P, Q, R et ayant un point de rebroussement en O, a un autre point (point d'inflexion) sur OX ou sur PQR, elle se compose nécessairement de droites. La véritable solution est la droite

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \left( \frac{p}{p'} + \frac{q}{q'} + \frac{r}{r'} \right).$$

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

*Si P, Q, R sont les points d'intersection d'une droite*



*avec une courbe de troisième degré ayant un point de rebroussement O, le point d'inflexion est sur la droite joignant le point O au centre des moyennes harmoniques des points P, Q, R par rapport au point d'intersection de OX avec la droite PQR.*

Voici comment on peut obtenir géométriquement quelques-uns des résultats qui précèdent.

Considérons une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement en O, passant par les trois points P, Q, R et ayant un point d'inflexion M sur la droite QR. Soit P'Q'R' un triangle dont les sommets soient avec ceux de PQR en ligne droite avec O. Si l'on construit la courbe homologique de la première par rapport au point O, en prenant les points P', Q', R' pour homologues des points P, Q, R, on aura une courbe du troisième degré passant par P', Q', R' et ayant son point d'inflexion M' à l'intersection de QR et de OM. On déduit de là que les points d'intersection de QR, quel que soit leur nombre, avec le lieu des points d'inflexion des courbes du troisième degré remplissant les conditions données, décrivent, lorsque P, Q, R se meuvent sur des droites issues de O, des droites passant également par O.

On peut remarquer aussi que toutes les courbes du troisième degré ayant un point de rebroussement sont des projections de la courbe  $ky^2 = x^3$ . Or, si par le point d'inflexion de cette courbe, qui est à l'infini dans la direction OY, on mène une droite quelconque, c'est-à-dire une parallèle à OY, elle est divisée en parties égales par la courbe et par la tangente OX au point de rebroussement. En projection, cette droite sera divisée harmoniquement par la courbe, le point d'inflexion et son point d'intersection avec la tangente au rebrousse-

ment. On déduit facilement de là que le point désigné par  $M$  est sur une droite issue de  $O$ , droite qui est la conjuguée harmonique de  $OX$  par rapport à  $OQ$  et à  $OR$ .

Considérons maintenant une des courbes du troisième degré ayant un point de rebroussement en  $O$  et admettant  $OX$  pour tangente en ce point. Soit  $A$  un point de  $OX$ . Menons par  $A$  une sécante quelconque, et soient  $P, Q, R$  les points où elle coupe la courbe, et  $A'$  le centre des moyennes harmoniques de ces points par rapport au point  $A$ . Lorsque la sécante tourne autour de  $A$ , le point  $A'$ , qui est toujours sur cette sécante, ne peut appartenir à une autre sécante que s'il est en  $P$ ; ce qui est impossible, puisque aucun des points  $P, Q, R$  ne peut venir au point  $A$  qui n'est pas sur la courbe. Le lieu de  $A'$  ne coupe donc qu'en un point toutes les droites issues de  $P$ : ce lieu est donc une droite. Cette droite passe évidemment par  $O$ , puisque les trois points d'intersection de  $OX$  et de la courbe sont en  $O$ . Si la sécante est menée par le point d'inflexion, ce point est le conjugué harmonique de  $A$  par rapport aux deux autres points d'intersection avec la courbe. Il est facile de voir d'après cela que ce point n'est autre que  $A'$ . Donc, si  $P, Q, R$  sont les points d'intersection d'une droite avec la courbe, le point d'inflexion est sur la droite qui joint le point  $O$  au centre des moyennes harmoniques des points  $P, Q, R$  par rapport au point d'intersection de la droite et de  $OX$ .

*Note.* — La même question a été résolue par M. E. Chrétien, élève du lycée du Havre.

---



d'où

$$S = \frac{2n(n+2)a}{\sqrt{[n(n+2)]^2 - (n-2)^2}},$$

et

$$x_i = \frac{[n(n+2) - (2i+1)(n-2)]a}{\sqrt{[n(n+2)]^2 - (n-2)^2}}.$$

En donnant à  $i$  les valeurs 1, 2, 3, ...,  $n$ , on aura la solution en nombres positifs.

Si l'on admet pour les inconnues des valeurs positives ou négatives, il faudra prendre chaque radical avec le double signe, et les diverses combinaisons de signes donneront en tout  $n^2$  solutions.

II. *D'un point O, pris dans le plan d'un cercle, partent quatre droites qui coupent sa circonférence, la première aux points a et a', la deuxième aux points b et b', la troisième aux points c et c', et la quatrième aux points d et d'.*

*Prouver que les sinus des moitiés des arcs ac, bd, ad, bc, a'c', b'd', a'd', b'c' sont liés entre eux par la relation*

$$\frac{\sin \frac{ac}{2} \sin \frac{bd}{2} \sin \frac{a'd'}{2} \sin \frac{b'c'}{2}}{\sin \frac{cb}{2} \sin \frac{da}{2} \sin \frac{d'b'}{2} \sin \frac{b'c'}{2}} = 1.$$

Les couples de droites  $ab'$  et  $a'b$ ,  $ac'$  et  $a'c$ ,  $ad'$  et  $a'd$  se coupent en des points  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  situés sur la polaire du point O, laquelle coupe  $aa'$  en un point  $\alpha$ .

Cela posé, les rapports anharmoniques des deux faisceaux  $a'(a, b, c, d)$  et  $a(a', b', c', d')$  respectivement égaux à ceux des quatre points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sont égaux entre eux, ce qui donne immédiatement la relation proposée.

On peut éviter la considération du rapport anhar-



nique. Soient  $p$  et  $p'$  les distances des points  $a$  et  $a'$  à la polaire du point  $O$ . En exprimant de deux manières les surfaces des triangles  $a'x\gamma$ ,  $a'\beta\delta \dots$ , on a

$$2 \text{ surf. } a'x\gamma = a'x.a'\gamma \sin \frac{ac}{2} = p'.x\gamma,$$

$$2 \text{ surf. } a'\beta\delta = a'\beta.a'\delta \sin \frac{bd}{2} = p'.\beta\delta,$$

$$2 \text{ surf. } ax\delta = ax.a\delta \sin \frac{a'd'}{2} = p.x\delta,$$

$$2 \text{ surf. } a\beta\gamma = a\beta.a\gamma \sin \frac{b'e'}{2} = p.\beta\gamma,$$

$$2 \text{ surf. } a'\beta\gamma = a'\beta.a'\gamma \sin \frac{bc}{2} = p'.\beta\gamma,$$

$$2 \text{ surf. } a'x\delta = a'x.a'\delta \sin \frac{ad}{2} = p'.x\delta,$$

$$2 \text{ surf. } a\beta\delta = a\beta.a\delta \sin \frac{b'd'}{2} = p.\beta\delta,$$

$$2 \text{ surf. } ax\gamma = ax.a\gamma \sin \frac{a'c'}{2} = p.x\gamma.$$

En ne considérant, dans chaque ligne, que la dernière égalité, et divisant le produit des quatre premières par celui des quatre dernières, on a, après suppression des facteurs communs,

$$\frac{\sin \frac{ac}{2} \sin \frac{bd}{2} \sin \frac{a'd'}{2} \sin \frac{b'e'}{2}}{\sin \frac{bc}{2} \sin \frac{ad}{2} \sin \frac{b'd'}{2} \sin \frac{a'c'}{2}} = 1.$$

C. Q. F. D.

**SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE  
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT  
SPÉCIAL EN 1880;**

PAR M. ERNEST LEBON.

*On donne deux plans verticaux se rencontrant sous un angle quelconque. Par un point de leur intersection on fait passer une série de plans coupant les deux premiers suivant deux droites perpendiculaires l'une à l'autre. Construire la trace du cône enveloppe de ces plans et reconnaître la nature de ce cône.*

1. La trace horizontale du cône enveloppe est l'enveloppe de droites construites de la manière suivante :

Le plan vertical de projection est l'un des plans donnés; la ligne de terre est  $QQ_1$ ; l'autre plan donné est  $P\alpha P'$ ; l'angle aigu  $P\alpha Q$  est l'angle  $\beta$  des plans donnés (1).

Soit  $s'$  le point donné sur  $\alpha P'$ . Menons une droite  $s'a$  dans le plan vertical; sa trace horizontale est  $a$  sur  $QQ_1$ . Un plan mené par  $s'$  perpendiculairement à  $s'a$  est perpendiculaire au plan vertical; il a pour traces les perpendiculaires  $s'a'_1$  à  $s'a$  et  $a'_1 a$  à  $QQ_1$ ; il coupe le plan  $P\alpha P'$  selon une droite faisant un angle droit avec  $sa$ , et ayant sa trace horizontale au point d'intersection  $a_1$  de  $\alpha P$  et de  $a'_1 a_1$ . Le plan déterminé par les droites rectangulaires issues de  $s'$  et ayant pour traces  $a$  et  $a_1$  coupe le plan horizontal selon la droite  $aa_1$ . La trace horizontale du cône enveloppe est l'enveloppe des droites telles que  $aa_1$ .

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

2. *Degré de la trace du cône, trouvé par la Géométrie supérieure.* — Le triangle rectangle  $asa_1$  donne, en désignant  $as$  par  $h$ ,

$$h^2 = \alpha a . \alpha a_1 = \alpha a . \alpha a_1 . \cos \beta.$$

D'où

$$(1) \quad \alpha a . \alpha a_1 = \frac{h^2}{\cos \beta}.$$

Donc les points tels que  $a$  et  $a_1$  sur les droites  $\alpha P$  et  $\alpha Q$  sont deux points homologues de deux divisions homographiques, dont les points homologues des points à l'infini coïncident en  $\alpha$ . On sait que l'enveloppe des droites joignant deux points homologues  $a$  et  $a_1$  est une conique tangente aux droites  $\alpha P$  et  $\alpha Q$  aux points homologues de leur point d'intersection  $\alpha$ , considéré successivement sur ces droites.

Donc la conique trace horizontale du cône enveloppe est une *hyperbole*, ayant pour asymptotes les droites  $\alpha P$  et  $\alpha Q$ . Les droites telles que  $aa_1$  étant des portions de tangentes à l'hyperbole comprises entre les asymptotes, les points de l'hyperbole sont au milieu de ces droites.

Les branches de l'hyperbole sont dans les angles obtus formés par  $\alpha P$  et  $\alpha Q$ . Ses axes sont selon les bissectrices des angles des asymptotes. Une construction géométrique connue donne ses sommets; on peut ici les obtenir en cherchant le point milieu de  $aa_1$  quand  $\alpha a = \alpha a_1$ , ou quand

$$\frac{\alpha a^2}{\alpha a_1^2} = \frac{h^2}{\cos^2 \beta}.$$

3. Les droites  $\alpha Q$  et  $\alpha P$  étant les axes coordonnés, l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est

$$(2) \quad xy = \frac{h^2}{4 \cos \beta}.$$

4. *Autres solutions pour trouver le degré de la trace du cône enveloppe.* — On peut trouver la relation (1) comme précédemment; puis on dit :

Considérons une seconde droite  $bb_1$ , analogue à  $aa_1$ , et la coupant en I. D'après la relation (1), on a

$$\alpha a . \alpha a_1 = \alpha b . \alpha b_1.$$

Donc les deux triangles  $a\alpha a_1$  et  $b\alpha b_1$  sont égaux; par suite, les deux triangles  $aIb$  et  $a_1Ib_1$  sont aussi égaux, et l'on a

$$Ia . Ib = Ia_1 . Ib_1.$$

Le lieu cherché étant l'enveloppe des droites  $aa_1$ ,  $bb_1$ , ..., est tangent à la droite  $aa_1$  au point limite des positions du point d'intersection I des droites  $aa_1$  et  $bb_1$ , quand  $bb_1$  se rapproche de  $aa_1$  pour se confondre avec  $aa_1$ . Alors  $b$  est en  $a$  et  $b_1$  est en  $a_1$ , et l'égalité précédente donne

$$\overline{Ia}^2 = \overline{Ia_1}^2$$

ou

$$Ia = Ia_1.$$

Le lieu cherché est tangent aux droites telles que  $aa_1$  en leurs milieux; donc c'est une *hyperbole* ayant pour asymptotes les droites  $\alpha P$  et  $\alpha Q$ .

5. Enfin, après avoir trouvé la relation (1), on peut encore dire, en désignant par  $\lambda$  et  $\mu$  les longueurs  $\alpha a$  et  $\alpha a_1$ , en prenant  $\alpha Q$  et  $\alpha P$  pour axes :

L'équation de  $aa_1$  est

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0;$$

comme

$$\lambda \mu = \frac{h^2}{\cos \beta},$$

cette équation devient

$$\lambda^2 y \cos \beta - \lambda h^2 + h^2 x = 0.$$



La dérivée du premier membre, prise par rapport à  $\lambda$  et égale à zéro, donne

$$2\lambda y \cos \beta - h^2 = 0.$$

L'élimination de  $\lambda$  entre ces deux dernières équations donne l'équation du lieu cherché. On trouve

$$xy = \frac{h^2}{4 \cos \beta}.$$

Ce lieu est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites  $\alpha P$  et  $\alpha Q$ .

6. *Ordre du cône enveloppe.* — Le cône enveloppe ayant pour trace horizontale une conique est un cône du second ordre. Un de ses axes est  $s'z$ ; les deux autres sont les droites horizontales, intersections du plan horizontal mené par  $s'$  et des plans passant par  $s'z$  et par les axes de l'hyperbole, ou des plans bissecteurs des plans donnés. On reconnaît *a priori* que la droite  $s'a$  est un axe du cône, en remarquant que les traces telles que  $aa_1$  sont deux à deux parallèles et à égale distance de  $z$ , et que par suite le point  $z$  est un centre de la courbe enveloppe des traces.

7. *Ordre du cône enveloppe, trouvé par la Géométrie analytique.* — Prenons des plans coordonnés rectangulaires ayant pour origine le sommet  $s'$  du cône enveloppe;  $Xs'Z$  est l'un des plans donnés, ici le plan vertical de projection;  $Xs'Y$  est parallèle au plan horizontal de projection. Le second plan donné  $P$  passe par  $s'Z$  et fait avec  $Xs'Z$  un angle aigu  $\beta$ . Soient  $s'a$  et  $s'\Lambda_1$  deux droites rectangulaires situées dans les plans  $Xs'Z$  et  $P$ . Les équations de  $s'a$  et de  $s'\Lambda_1$  sont

$$(3) \quad x = az, \quad y = 0,$$

$$(4) \quad x = a'z, \quad y = amz.$$

Cette dernière équation résulte de l'équation

$$y = mx,$$

$m$  étant égal à  $\tan \beta$ .

Comme la projection  $s'a_1$  de  $s'A_1$  sur  $Xs'Z$  est perpendiculaire à  $s'a$ , les paramètres variables  $a$  et  $a'$  sont liés par la relation

$$(5) \quad aa' + 1 = 0.$$

Soit

$$(6) \quad Ax + By + z = 0$$

l'équation du plan déterminé par les droites  $s'a$  et  $s'A_1$ . Ce plan coupant  $Xs'Z$  selon  $s'a$ , on trouve que

$$(7) \quad Aa + 1 = 0;$$

ce plan contenant  $s'A_1$ , on a la relation suivante

$$(8) \quad Aa' + Ba'm + 1 = 0.$$

L'équation du plan (6) est, à cause des relations (5), (7) et (8),

$$(9) \quad -mx + (1 + a^2)y + amz = 0.$$

Elle renferme un paramètre variable  $a$ . L'équation dérivée de (9) est

$$(10) \quad 2ay + mz = 0.$$

L'équation du cône enveloppe des plans (9), obtenue en éliminant  $a$  entre (9) et (10), est

$$(11) \quad 4y^2 - m^2z^2 - 4mxy = 0.$$

Ce cône est donc du second ordre. La projection sur  $Xs'Y$  de la section du cône par le plan  $z + h = 0$  a pour équation

$$(12) \quad 4y^2 - 4mxy - m^2h^2 = 0.$$

C'est une hyperbole ; son centre est  $s'$  ; ses asymptotes sont données par les équations  $y = 0$  et  $y = mx$ . L'hyperbole située dans le plan  $z + h = 0$  est égale à celle dont l'équation est (12) ; ses asymptotes sont  $\alpha Q$  et  $\alpha P$ . Par une transformation de coordonnées, l'équation (12) donne l'équation (2) de l'hyperbole trace rapportée à ses asymptotes.

8. La relation connue  $(A - A'')(A' - A'') - B''^2 = 0$  montre que le cône enveloppe ne peut être de révolution que quand  $m = 0$  ; le cône se réduit au plan double  $Xs'Z$ .

Quand les plans donnés sont rectangulaires,  $m$  égale l'infini, l'équation du cône enveloppe n'est satisfaite que pour les systèmes de valeurs  $y = 0$  et  $z = 0$  ou  $x = 0$  et  $z = 0$  ; le cône se réduit à l'axe  $s'X$  et à l'axe  $s'Y$ . Ce résultat pouvait être prévu ; en effet, les plans dont on cherche l'enveloppe forment deux groupes composés chacun d'une infinité de plans passant par les perpendiculaires menées en  $s'$ , soit au premier plan, soit au second.

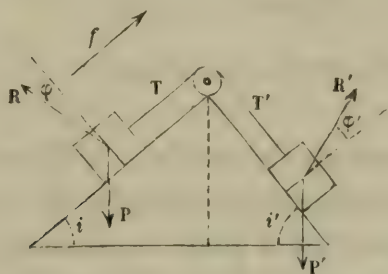
## SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE POUR L'OBTENTION DU BREVET DE CLUNY EN 1880 ;

PAR M. G. ROUBAUDI.

*Deux corps P et Q placés sur deux plans inclinés sont unis par un fil flexible qui passe sur une poulie. Étudier le mouvement du corps P, sachant que les angles que ces plans font avec l'horizon sont respectivement  $i$  et  $i'$ .*

Supposons que le mouvement ait lieu dans le sens de la flèche  $f$ , et considérons séparément le mouvement des poids P, P' et de la poulie.

1° *Mouvement du corps P.* — Les forces qui sollicitent ce corps sont : son poids  $P$ , la tension  $T$  du fil qui le



retient, et, si l'on tient compte du frottement, la réaction  $R$  du plan, qui est incliné sur la normale aux surfaces apparentes, et en sens inverse du mouvement, d'un angle  $\alpha = \arctang f$ ,  $f$  étant le coefficient du frottement relatif aux substances en contact.

L'équation du mouvement de ce corps est, en appelant  $\varphi$  l'accélération du mouvement,

$$(1) \quad m\varphi = T - P \sin i - R \sin \alpha.$$

Comme la trajectoire qu'il décrit est rectiligne, la somme des projections des forces sur la normale est nulle, ce qui fournit la relation

$$(2) \quad R \cos \alpha - P \cos i = 0.$$

Ces deux équations donnent tout ce qui est relatif au mouvement du corps  $P$  et permettent de déterminer la réaction  $R$ . Si l'on élimine  $R$ , on en conclut

$$(3) \quad T = \frac{P}{g} \varphi + P(\sin i + f \cos i).$$

2° *Mouvement du corps P'.* — En raisonnant comme pour le corps  $P$ , on trouve les trois équations ana-



logues

$$(1)' \quad m' \varphi = P' \sin i' - R' \sin \alpha - T',$$

$$(2)' \quad R' \cos \alpha' - P' \cos i' = 0,$$

$$(3)' \quad T' = P' (\sin i' - f' \cos i') - \frac{P'}{g} \varphi.$$

3° *Mouvement de la poulie.* — Si je désigne par le symbole  $\varphi_\omega$  l'accélération angulaire de la poulie, on sait que cette accélération a pour expression la somme des moments, par rapport à l'axe de la poulie, des forces qui la sollicitent, divisée par le moment d'inertie I; j'aurai donc

$$\varphi_\omega = \frac{r}{I} (T' - T);$$

par suite, l'accélération linéaire d'un point de la circonférence moyenne, qui est celle du mouvement général de tout le système, aura pour expression

$$(4) \quad \varphi = \frac{r^2}{I} (T' - T).$$

Les équations (3), (3)' et (4) nous font connaître le mouvement du système caractérisé par  $\varphi$ , et permettent de déterminer les tensions T et T'.

1° *Détermination de  $\varphi$ .* — En retranchant membre à membre (3) et (3)', il vient

$$\begin{aligned} T' - T &= P' (\sin i - f' \cos i') \\ &\quad - P (\sin i + f \cos i) - \frac{1}{g} (P' + P), \end{aligned}$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (4), on a

$$\begin{aligned} \varphi \frac{1}{r^2} &= P' (\sin i' - f' \cos i') \\ &\quad - P (\sin i + f \cos i) - \frac{1}{g} (P' + P), \end{aligned}$$

relation de laquelle on déduit facilement

$$(5) \quad \varphi = g \frac{r^2 [P'(\sin i - f \cos i') - P(\sin i + f \cos i)]}{1g + r^2(P + P')}.$$

Telle est l'équation qui définit le mouvement du système; elle montre que ce mouvement est uniformément varié; ses lois sont par suite connues.

*Discussion.* — Si  $\frac{P}{P'} < \frac{\sin i' - f \cos i'}{\sin i + f \cos i}$ , alors  $\varphi$  est  $> 0$  et le mouvement du corps P est ascendant et uniformément accéléré. Ses lois sont donc

$$s = \varphi \frac{t^2}{2}, \quad v = \varphi t,$$

ou

$$s = s_0 + \varphi \frac{t^2}{2}, \quad v = v_0 + \varphi t,$$

selon qu'à l'origine des temps le système était au repos ou possédait une vitesse  $v_0$ .

Si  $\frac{P}{P'} > \frac{\sin i' - f \cos i'}{\sin i + f \cos i}$ , alors  $\varphi$  est  $< 0$  et le corps P est animé d'un mouvement descendant retardé, ou bien d'un mouvement descendant accéléré, selon que ce corps possédait une vitesse initiale ascendante  $v_0$  ou qu'il était primitivement au repos.

Enfin, dans le cas particulier où  $\frac{P'}{P} = \frac{\sin i' - f' \cos i'}{\sin i + f \cos i}$ , alors  $\varphi$  est nul, et le corps P est en repos ou en mouvement uniforme, selon qu'il était primitivement au repos ou qu'il possédait une vitesse initiale  $v_0$ .

2° *Détermination des tensions.* — Si, dans les équations (3) et (3)', je remplace  $\varphi$  par sa valeur tirée de (5), il vient, toutes réductions faites

$$(6) \quad T = P \frac{1g(\sin i + f \cos i) + P' r^2 (\sin i + f \cos i + \sin i' - f' \cos i')}{1g + r^2(P + P')},$$

$$(7) \quad T' = P' \frac{1g(\sin i' - f' \cos i') + P r^2 (\sin i' - f' \cos i' + \sin i + f \cos i)}{1g + r^2(P + P')}.$$

*Remarque.* — Si l'on néglige le frottement, les équations qui déterminent le mouvement du système et les tensions du fil deviennent

$$\begin{aligned} \varphi &= g \frac{r^2(P' \sin i' - P \sin i)}{I g + r^2(P + P')}, \\ T &= P \frac{I g \sin i + P' r^2(\sin i + \sin i')}{I g + r^2(P + P')}, \\ T' &= P' \frac{I g \sin i' + P r^2(\sin i + \sin i')}{I g + r^2(P + P')}. \end{aligned}$$

Si, de plus, on néglige l'inertie de la poulie, il vient

$$\begin{aligned} \varphi &= g \frac{P' \sin i' - P \sin i}{P + P'}, \\ T &= T' = \frac{PP'(\sin i + \sin i')}{P + P'}. \end{aligned}$$

Enfin on pourrait terminer la discussion du problème en faisant varier les angles  $i$  et  $i'$ , et examinant les cas particuliers où ces angles prennent les valeurs remarquables 0 et  $90^\circ$ ; mais cette partie ne présentant aucune difficulté, nous laissons au lecteur le soin de voir ce que deviennent les expressions précédentes quand on y introduit les hypothèses indiquées.

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION, 1881);

PAR M. L. KIEN.

Élève de l'Institution Notre-Dame, à Plaisance.

*Soit*

$$(1) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

*l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à*

ses axes; soient  $\alpha, \beta$  les coordonnées d'un point P situé dans le plan de l'ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation

$$(2) \quad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0,$$

dans laquelle  $c^2 = a^2 - b^2$ .

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points communs aux courbes (1) et (2); dans chacune d'elles, on mène le diamètre conjugué à la direction OP, et on projette le point O sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.

3° Par les points communs aux courbes (1) et (2), on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles, quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné  $m$ , menée par le point O.

On examinera en particulier le cas où  $m = \frac{a^3}{b^3}$  et celui où  $m = -\frac{a^3}{b^3}$ ;

1° L'équation d'une normale en un point  $(x, y)$  de l'ellipse est

$$\frac{Y - y}{a^2 y} = \frac{X - x}{b^2 x};$$

si cette normale est assujettie à passer par le point P( $\alpha, \beta$ ), on a la condition

$$\frac{\beta - y}{a^2 y} = \frac{\alpha - x}{b^2 x}$$

ou

$$(2) \quad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

Les points d'incidence  $(x, y)$  sont à l'intersection de



l'ellipse et de l'hyperbole équilatère (2), car leurs coordonnées sont données par l'équation de cette ellipse (1) et l'équation (2), considérées comme simultanées; la première partie est donc démontrée.

2° Ces points d'incidence sont au nombre de quatre; en les joignant on obtient un quadrilatère, et les coniques passant par ces quatre points sont circonscrites à ce même quadrilatère.

Or nous savons que les diamètres correspondant à une direction donnée, dans les coniques circonscrites à un quadrilatère, passent par un point fixe Q; de plus, les perpendiculaires abaissées de O sur ces diamètres passent toutes par le point fixe O; le lieu de la projection de O sur ces mêmes diamètres sera donc le cercle décrit sur OQ comme diamètre.

Le calcul vérifie d'ailleurs ce raisonnement.

L'équation générale des coniques passant par les pieds des normales est

$$(K) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 + \lambda (c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y) - a^2 b^2 = 0.$$

La droite OP ayant pour coefficient angulaire  $\frac{\beta}{\alpha}$ , les diamètres conjugués dans les coniques (K) ont pour équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0,$$

ou

$$(3) \quad (2b^2\alpha + \lambda c^2\beta)x + (\lambda c^2\alpha + 2a^2\beta)y - \lambda c^2\alpha\beta = 0.$$

L'équation des perpendiculaires abaissées de O sur ces diamètres est donc

$$(4) \quad y = \frac{\lambda c^2\alpha + 2a^2\beta}{2b^2\alpha + \lambda c^2\beta} x.$$

En éliminant  $\lambda$  entre les équations (3) et (4), on a le lieu. On trouve l'équation

$$(b^2\alpha x + a^2\beta y)(\beta y - \alpha x) - (b^2\alpha y - a^2\beta x)(\beta x + \alpha y - \alpha\beta) = 0,$$

ou simplement

$$(x^2 + y^2)(a^2 \beta^2 - b^2 \alpha^2) - (a^2 \beta x - b^2 \alpha y) \alpha \beta = 0,$$

équation d'un cercle passant par l'origine.

3° Déterminons  $\lambda$  dans l'équation (K) pour que cette équation représente une parabole. Il faut ici que

$$\lambda^2 c^4 - 4a^2 b^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \pm \frac{2ab}{c^2}.$$

Par suite, l'équation des deux paraboles passant par les pieds des normales issues de P est

$$(ay \pm bx)^2 \pm \frac{2ab}{c^2}(b^2 \beta x - a^2 \alpha y) - a^2 b^2 = 0.$$

Séparons les signes, en remarquant qu'après avoir calculé pour les signes supérieurs, on passera aux signes inférieurs en changeant  $b$  en  $-b$  dans cette dernière équation. On a donc

$$(5) \quad (ay + bx)^2 + \frac{2ab}{c^2}(b^2 \beta x - a^2 \alpha y) - a^2 b^2 = 0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole est

$$A f'_x + B f'_y = 0,$$

ou

$$(6) \quad (bx + ay)(a^2 + b^2) + \frac{ab}{c^2}(b^3 \beta - a^3 \alpha) = 0.$$

Le point P étant sur la droite  $y = mx$ , on a

$$(7) \quad \beta = m\alpha.$$

En éliminant  $\alpha, \beta$  entre les équations (5), (6), (7), on a le lieu du sommet de l'une des paraboles.

On trouve ainsi l'équation

$$(8) \quad \begin{cases} 2(b^2 mx - a^2 y)(bx + ay)(a^2 + b^2) \\ - (b^3 m - a^3) \\ \times (ay + bx + ab)(ay + bx - ab) = 0. \end{cases}$$

Si l'on considérait la deuxième parabole, le lieu de son sommet serait

$$2(b^2mx - a^2y)(bx - ay)(a^2 + b^2) - (b^3m + a^3)(ay - bx + ab)(ay - bx - ab) = 0.$$

On pourrait chercher les axes de la conique (8), puis la construire facilement. On pourrait aussi chercher pour quelles valeurs de  $m$  la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. L'origine est d'ailleurs centre de la conique.

En remplaçant  $m$  par  $\frac{a^3}{b^3}$  dans l'équation (8), on obtient

$$bx + ay = 0,$$

équation d'une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse, et, en remplaçant  $m$  par cette même valeur dans l'équation du lieu relatif à la deuxième parabole des pieds des normales, on obtient

$$(bx - ay)(ax - by)(a^2 + b^2) - ab(ay - bx + ab)(ay - bx - ab) = 0,$$

ou plus simplement

$$(a^2x^2 + b^2y^2)ab - (a^4 + b^4)xy + a^3b^3 = 0.$$

On a

$$(a^4 + b^4)^2 - 4a^4b^4 = (a^4 - b^4)^2 > 0;$$

le lieu est donc, dans ce cas, une hyperbole.

L'équation des asymptotes de cette hyperbole est

$$ab(a^2x^2 + b^2y^2) - (a^4 + b^4)xy = 0.$$

En remplaçant  $m$  par  $-\frac{a^3}{b^3}$  dans les deux équations du lieu trouvé plus haut, il vient pour la première

$$(a^2x^2 + b^2y^2)ab - (a^4 + b^4)xy - a^3b^3 = 0.$$

équation d'une hyperbole ayant mêmes asymptotes que la précédente.

Pour la deuxième équation, on trouve

$$bx - ay = 0,$$

équation d'une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Chaigneau, élève de l'école préparatoire Duvigneau de Lanneau (classe de M. Geoffroy), et par M. H. Lez.

## QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (MARSEILLE, 1881);

PAR M. MORET-BLANC.

1. On considère la cubique représentée par l'équation

$$(1) \quad x^3 + y^3 - 3kxy + 1 = 0,$$

et l'on demande, en premier lieu, de déterminer ses points d'inflexion; en second lieu, d'indiquer pour quelle valeur de  $k$  cette courbe se décompose en trois droites.

Les points d'inflexion sont déterminés par l'intersection de la courbe avec celle qui est représentée par le hessien égale à zéro

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -k & -ky \\ -k & 2y & -kx \\ -ky & -kx & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et divisant par 2,

$$(2) \quad k^2(x^3 + y^3 + kxy + 1) - 4xy = 0,$$



équation qui, combinée avec celle de la courbe proposée, donne

$$(3) \quad (k^3 - 1)xy = 0.$$

Les points d'inflexion sont les intersections de la courbe avec les axes de coordonnées : deux sont réels ( $x = 0, y = -1$ ) et ( $y = 0, x = -1$ ); les autres sont imaginaires.

L'équation (3) est identiquement satisfaite, quels que soient  $x$  et  $y$ , si  $k^3 = 1$ , ou, en se bornant aux valeurs réelles,  $k = 1$ . Tout point de la courbe est alors un point d'inflexion; c'est-à-dire que la courbe se compose de trois droites.

On arrive à ce même résultat en identifiant l'équation proposée avec

$$(y - mx - n)(y - m_1x - n_1)(y - m_2x - n_2) = 0.$$

On a les conditions

$$m + m_1 + m_2 = 0, \quad mm_1 + mm_2 + m_1m_2 = 0, \quad mm_1m_2 = -1,$$

$$n + n_1 + n_2 = 0, \quad nn_1 + nn_2 + n_1n_2 = 0, \quad nn_1n_2 = -1,$$

$$m_1m_2n + mm_2n_1 + mm_1n_2 = 0,$$

$$mn_1n_2 + m_1nn_2 + m_2nn_1 = 0,$$

$$mn_1 + m_1n + mn_2 + m_2n + m_1n_2 + m_2n_1 = -3k.$$

Les trois premières montrent que les valeurs  $m, m_1, m_2$  sont les trois racines cubiques de  $-1$ , et les trois suivantes qu'il en est de même de  $n, n_1, n_2$ ; et si l'on prend

$$m = -1, \quad m_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},$$

il faut, pour satisfaire aux autres conditions, prendre

$$n = -1, \quad n_1 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad n_2 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2},$$

et faire  $k = 1$ .

Les trois droites sont donc

$$\begin{aligned}x + y + 1 &= 0, \\ y &= \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} x + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \\ y &= \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} x + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.\end{aligned}$$

Les deux dernières sont imaginaires et se coupent au point réel  $x = y = 1$ .

2. On considère toutes les coniques passant par l'intersection d'un cercle et de deux droites parallèles données, et on demande le lieu des foyers de ces courbes. Discuter la forme de ce lieu dans le cas où l'une des droites parallèles devient tangente au cercle donné.

Prenons pour axe des  $x$  le diamètre du cercle parallèle aux droites données et pour axe des  $y$  le diamètre perpendiculaire, et soient

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

l'équation du cercle, et

$$y = a, \quad y = b$$

celles des deux droites données; l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des droites et du cercle sera

$$x^2 + y^2 - r^2 + \lambda(y - a)(y - b) = 0,$$

ou

$$(1) \quad x^2 + (1 + \lambda)y^2 - \lambda(a + b)y - r^2 + \lambda ab = 0.$$

La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant qu'on a  $\lambda < -1$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\lambda > -1$ .

Les coordonnées du centre sont  $x = 0, y = \frac{\lambda(a+b)}{2(1+\lambda)}$ .

En y transportant l'origine, l'équation devient

$$x^2 + (1+\lambda)y^2 = r^2 - \lambda ab + \frac{\lambda^2(a+b)^2}{4(1+\lambda)},$$

ou

$$x^2 + (1+\lambda)y^2 = r^2 + \frac{\lambda^2(a-b)^2 - 4\lambda ab}{4(1+\lambda)}.$$

L'axe des  $y$  sera l'axe focal : 1<sup>o</sup> des ellipses correspondant aux valeurs de  $\lambda$  comprises entre zéro et  $-1$ ; 2<sup>o</sup> de la parabole; 3<sup>o</sup> des hyperboles correspondant aux valeurs de  $\lambda < -1$ , pourvu que l'on ait aussi

$$r^2 + \frac{\lambda^2(a-b)^2 - 4\lambda ab}{4(1+\lambda)} > 0.$$

Dans les autres cas le foyer sera sur l'axe de la courbe parallèle à  $Ox$ . Cherchons le lieu de ces foyers.

Soient  $C$  le centre de la courbe,  $BB'$  l'axe dirigé suivant  $Oy$ , et  $AA'$  l'axe parallèle à  $Ox$ .

$\overline{CB}^2$  est le carré de la demi-différence des racines de l'équation

$$(1+\lambda)y^2 - \lambda(a+b)y - r^2 + \lambda ab = 0.$$

On a donc

$$\overline{CB}^2 = \frac{\lambda^2(a-b)^2 + 4\lambda(r^2 - ab) + 4r^2}{4(1+\lambda)^2},$$

$$\overline{CA}^2 = \frac{\lambda^2(a-b)^2 + 4\lambda(r^2 - ab) + 4r^2}{4(1+\lambda)};$$

$x$  et  $y$  désignant les coordonnées d'un des foyers, on a

$$y = \frac{\lambda(a+b)}{2(1+\lambda)},$$

$$r^2 - \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \frac{\lambda[\lambda^2(a-b)^2 + 4\lambda(r^2 - ab) + 4r^2]}{4(1+\lambda)^2}.$$

On obtiendra le lieu des foyers en éliminant  $\lambda$  entre ces deux équations, ce qui donne

$$x^2 = \frac{2y[(a+b)y^2 - 2(r^2 + ab)y + r^2(a+b)]}{(a+b)(a+b-2y)}.$$

C'est une courbe du troisième ordre passant par l'origine et symétrique par rapport à l'axe des  $y$ .

Si l'une des droites est tangente à la circonférence, il faut faire  $b = r$ , et l'équation devient

$$x^2 = \frac{2y(y-r)^2}{a+r-2y},$$

d'où

$$x = \pm (r-y) \frac{\sqrt{2y}}{a+r-2y}.$$

On en tire

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{(a+r)(r-3y) + 4y^2}{(a+r-2y)\sqrt{2y(a+r-2y)}},$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{(a+r-2y)\sqrt{2y(a+r-2y)}}{(a+r)(r-3y) + 4y^2}.$$

On ne peut donner à  $y$  que les valeurs comprises entre zéro et  $\frac{a+r}{2}$ ; la courbe, symétrique par rapport à l'axe des  $y$ , touche l'axe des  $x$  à l'origine et a pour asymptote la droite  $y = \frac{a+r}{2}$ , c'est-à-dire la parallèle équidistante des deux droites données; elle présente donc deux points d'inflexion, donnés par l'équation  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , ou

$$(5r-3a)y - r(a+r) = 0.$$



d'où

$$y = \frac{r(a+r)}{5r-3a},$$

$$x = \pm \frac{4r}{5r-3a} \sqrt{\frac{2}{3} r(r-a)}.$$

### PUBLICATIONS RÉCENTES.

A Treatise of the theory of determinants, with graduated sets of exercises, for use in Colleges and Schools. By Thomas Muir, M. A. F. R. S. E., mathematical master in the high School of Glasgow. London, Macmillan and Co; 1882.

Conic Sections treated geometrically, by W. H. Besant, M. A. F. R. S., mathematical lecturer of St. John's college, Cambridge. Fourth edition, revised. Cambridge, Deighton, Bell and Co. London, George Bell and Sons.

### ERRATA DU TOME XX, 2<sup>e</sup> SÉRIE.

Page 479, la 5<sup>e</sup> case de la 4<sup>e</sup> ligne du 3<sup>e</sup> tableau doit être teinte :

La 4<sup>e</sup> case de la 3<sup>e</sup> ligne du 8<sup>e</sup> tableau doit être teinte à la place de celle qui la suit :

La 2<sup>e</sup> case de la 7<sup>e</sup> ligne et la 5<sup>e</sup> case de la 8<sup>e</sup> ligne du même tableau doivent être teintes.

Page 501, ligne 2 en remontant, *au lieu de + . . . , lisez - . . .*

Page 503, ligne 19, *au lieu de proportion, lisez proposition.*

Page 504, ligne 7, dans la troisième parenthèse, *au lieu de . . . pq, lisez + 2 pq.*

Page 504, ligne 12, *au lieu de - 3 q<sup>4</sup>, lisez + 3 q<sup>4</sup>.*

---

## SUR LA COURBE SYNCHRONE DE LA CYCLOÏDE ;

PAR M. H. RESAL.

---

1. Nous rappellerons que l'on désigne en général sous le nom de *courbe synchrone* le lieu des extrémités d'arcs issus d'une origine commune, parcourus dans un temps donné par un point matériel pesant, partant de cette origine sans vitesse initiale, lorsque ces arcs appartiennent à des courbes semblables dont l'origine est le centre de similitude (1).

On sait que, pour le plan incliné et la lemniscate, la courbe synchrone est un cercle.

Pour des boucles de cycloïde ayant leur base horizontale et une extrémité commune, qui est le point de départ, l'équation de la courbe synchrone est très compliquée; néanmoins on est parvenu à démontrer qu'elle coupe les trajectoires à angle droit.

Dans cette Note, nous nous proposons d'exposer une méthode semi-géométrique, semi-analytique, qui permet d'établir rapidement cette propriété et, de plus, de trouver les expressions de l'aire, de l'arc et du rayon de courbure de la courbe.

### 2. Soient

$Ox$ ,  $Oy$  l'horizontale et la verticale de l'origine  $O$  des cycloïdes;

$S$  le sommet de l'une d'entre elles;

---

(1) L'idée du problème des courbes synchrones est due à Bernoulli (*Acta Erud.*, 1697). Euler s'est aussi occupé de ce problème (*Mech.*, t. II).



Mais on sait que cet arc est égal à  $2mB = 2u \cos \varphi$  ;  
par suite

$$(1) \quad \varphi = \sqrt{\frac{\tau_1}{u}},$$

en posant

$$(2) \quad \tau_1 = \frac{g\tau^2}{2},$$

cette expression étant la hauteur OM de la chute verticale du point pesant au bout du temps  $\tau$ .

Le point M est l'une des extrémités de la courbe synchrone, puisqu'il correspond à  $u = \infty$ .

Nous avons maintenant

$$(3) \quad \begin{cases} OA = \text{arc } Am = u\varphi = \sqrt{u\tau_1}, \\ \text{corde } Am = u \sin \varphi = u \sin \sqrt{\frac{\tau_1}{u}}. \end{cases}$$

Soient  $A', m'$  les positions infiniment voisines correspondantes de  $A, m$ ;  $b, n$  les projections de  $A, m$  sur  $A'm'$ , et  $q$  celle de  $b$  sur  $mn$ . En ayant égard aux formules (1) et (3), on voit facilement que

$$(4) \quad \begin{cases} AA' = dOA = \frac{\sqrt{\tau_1}}{2} \frac{du}{\sqrt{u}}, \\ Ab = AA' \sin \varphi = \frac{\sqrt{\tau_1}}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} \sin \sqrt{\frac{\tau_1}{u}}, \\ d\varphi = -\frac{\sqrt{\tau_1}}{2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \widehat{qA'n}. \end{cases}$$

Si l'on remarque que

$$mn = mq + qn = Ab + \text{corde } Am d\varphi,$$

et si l'on substitue à  $Ab, d\varphi$  et corde  $Am$  leurs valeurs ci-dessus, on trouve  $mn = 0$ .

Le point  $n$  venant se confondre avec  $m$ , on voit que



$m'_1$  vient se placer en un point  $m'$  situé sur le prolongement de  $A'm$  et que, par suite, *la courbe synchrone est normale à la cycloïde.*

3. La plus petite valeur de  $u$  correspond à celle des cycloïdes qui est parcourue totalement par le mobile au bout du temps  $\tau$  et est donnée par

$$OA = \sqrt{ur_1} = \pi u,$$

d'où

$$u = \frac{r_1}{\pi^2}, \quad OA = \frac{r_1}{\pi}, \quad C = \pi.$$

Ainsi, en portant sur l'axe la longueur

$$Om_0 = \frac{r_1}{\pi},$$

on obtiendra un point  $m_0$  de la courbe où elle sera tangente à cet axe.

La formule (1) montre d'ailleurs que la tangente est horizontale au point M.

Sil'on se donne une valeur de  $u$  supérieure à  $\frac{3}{\pi^2}$ , il sera facile de déterminer la longueur correspondante de OA, soit au moyen de la première des formules (3), soit par l'intersection avec Ox de la demi-circonférence construite sur la portion de la direction de Oy déterminée par le point M et par l'extrémité d'une longueur égale à  $u$  portée au-dessus de O et à partir de ce point. En traçant la circonférence de rayon  $\frac{u}{2}$  tangente en A à Ox et limitant sur elle l'arc  $Am = OA$ , on obtiendra la position du point cherché  $m$ .

Il y a un troisième point principal qu'il est bon de déterminer lorsque l'on veut exécuter le tracé de la courbe : c'est celui pour lequel la tangente est verticale ;

on a pour ce point, d'après la formule (1),

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\tau_1}{u}},$$

d'où

$$u = \frac{4\tau_1}{\pi^2}, \quad OA = \frac{2\tau_1}{\pi} = 2Om_0.$$

4. La seconde des formules (3) donne

$$d\overline{Am} = du \left( \sin \sqrt{\frac{\tau_1}{u}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_1}{u}} \cos \sqrt{\frac{\tau_1}{u}} \right)$$

et, en supposant que  $b$  se trouve sur  $A'm$ , en vertu de la formule (1) et de la première des formules (4),

$$A'b = AA' \sin \varphi = \frac{\sqrt{\tau_1}}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} \cos \sqrt{\frac{\tau_1}{u}}.$$

Si nous désignons par  $d\sigma$  l'élément d'arc  $mm'$  de la courbe synchrone, on a évidemment

$$d\sigma + A'b = dAm,$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$d\sigma = du \left( \sin \sqrt{\frac{\tau_1}{u}} - \sqrt{\frac{\tau_1}{u}} \cos \sqrt{\frac{\tau_1}{u}} \right),$$

et, en vertu de la formule (1),

$$(5) \quad d\sigma = -\frac{2\tau_1}{\varphi^3} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) d\varphi.$$

L'intégrale générale de cette expression est

$$\sigma = \tau_1 \left( \frac{\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi}}{\varphi} + \int \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi \right) + \text{const.}$$

Pour avoir la longueur  $\lambda$  de l'arc  $m_0 m \mu$ , l'intégrale devra être prise entre les limites  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ , ce qui donne

$$(6) \quad \lambda = r_1 \left( \frac{1}{\pi} + \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\varphi} \right).$$

5. Comme l'angle de contingence est  $-d\varphi$ , la formule (5) donne immédiatement, pour le rayon de courbure,

$$(7) \quad \rho = -\frac{d\tau}{d\varphi} = 2r_1 \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi^3} - \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} \right).$$

Pour  $\varphi = 0$  ou pour le point M, on a  $\rho = \frac{2r_1}{3}$ ,

$$\varphi = \pi \quad \quad \quad \gg \quad \quad m_0 \quad \gg \quad \rho = \frac{2r_1}{\pi^2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg \quad \rho = \frac{16r_1}{\pi^3}.$$

Il est facile d'ailleurs de voir que l'expression (7) peut se mettre sous la forme suivante

$$\rho = 2r_1 \frac{AB}{OA^2} \left( \frac{AB \times Am}{OA} - Bm \right),$$

qui permet à la rigueur de conduire géométriquement le rayon de courbure

6. Proposons-nous maintenant de déterminer la valeur de l'aire  $Om_0mM$ . De la formule (1) et de la première des formules (3) on déduit

$$u = \frac{r_1}{\varphi^2}, \quad OA = \frac{r_1}{\varphi}, \quad dOA = -\frac{r_1}{\varphi^2} d\varphi.$$

Nous avons ainsi

$$\text{aire } AmA' = \frac{dOA}{2} \frac{u}{2} (1 - \cos 2\varphi) = -\frac{r_1^2}{4\varphi^3} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi,$$

puis

$$\text{aire } m_0 m A = -\frac{r_1^2}{4} \int_{\pi}^{\varphi} \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{\varphi^4} d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \text{aire } O m A &= \frac{r_1}{2\varphi} \frac{\pi}{2} (1 - \cos 2\varphi) = \frac{r_1^2}{4} \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{\varphi^3} \\ &= \frac{r_1^2}{4} \left\{ \int_{\pi}^{\varphi} \left[ -\frac{3(1 - \cos 2\varphi)}{\varphi^4} + \frac{2 \sin 2\varphi}{\varphi^3} \right] d\varphi + \frac{2}{\pi^3} \right\}. \end{aligned}$$

La différence de ces deux dernières expressions, où l'aire du secteur  $O m_0 m$ , que nous désignerons par  $A$ , est, par suite,

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1^2}{4} \left[ -2 \int_{\pi}^{\varphi} \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{\varphi^4} d\varphi + 2 \int \frac{\sin 2\varphi}{\varphi^3} d\varphi + \frac{2}{\pi^3} \right] \\ &= \frac{r_1^3}{2} \left( \frac{1}{3\varphi^3} + \int_{\pi}^{\varphi} \frac{\cos 2\varphi}{\varphi^4} d\varphi + \int_{\pi}^{\varphi} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi^4} d\varphi + \frac{2}{3\pi^3} \right), \end{aligned}$$

ou encore, en posant  $2\varphi = \chi$ ,

$$A = r_1^2 \left( \frac{4}{3\chi^3} + 4 \int_{\pi}^{\chi} \frac{\cos \chi}{\chi^4} d\chi + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\chi} \frac{\sin \chi}{\chi^3} d\chi + \frac{1}{3\pi^3} \right).$$

En intégrant par parties, on reconnaît facilement que cette expression se réduit à la suivante

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1^3}{3} \left[ \frac{4}{\chi^3} (1 - \cos \chi) - \frac{\sin \chi}{\chi^2} - \frac{\cos \chi}{\chi} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\chi} \frac{\sin \chi}{\chi} d\chi - \frac{31}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^2} \right]. \end{aligned}$$

Enfin on a, en supposant  $\chi = 0$ , pour l'aire cherchée,

$$O m m_0 = \frac{r_1}{3} \left( \frac{4}{\pi^2} - \frac{31}{\pi^3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \chi}{\chi} d\chi \right).$$



---



---

## SUR LA THÉORIE DU DÉPLACEMENT;

PAR M. HALPHEN.

---

M. Cyparissos Stephanos a fait connaître, dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (7<sup>e</sup> série, tome VI, page 13), l'élégante proposition que voici :

*Trois figures égales, situées d'une manière arbitraire sur un plan, coïncident avec les symétriques d'une même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.*

Le même géomètre a énoncé aussi, dans une communication verbale, une proposition analogue et relative à trois positions, occupées dans l'espace par une même figure, dont un point reste fixe. En cherchant à généraliser encore, j'ai été conduit à mettre sous une forme très simple les éléments de la théorie du déplacement. C'est ce que je me propose de faire voir dans cette Note.

Soient, dans l'espace,  $F_1$  et  $F_2$  deux positions d'une même figure, tellement choisies qu'une droite de la figure  $F_1$  coïncide avec son homologue de la figure  $F_2$ , non seulement en position, mais encore en direction. Soit  $A_{1,2}$  cette droite. La figure  $F_1$  étant donnée, ainsi que la droite  $A_{1,2}$ , on obtient  $F_2$  en imprimant à  $F_1$  deux mouvements, l'un de translation, l'autre de rotation, le long et autour de  $A_{1,2}$ . L'ordre dans lequel s'effectuent ces deux mouvements n'influe pas sur le résultat. S'ils s'effectuent ensemble et par quantités proportionnelles, le mouvement résultant est hélicoïdal. Pour cette raison, le déplacement est dit *hélicoïdal*. Ici on ne considère

que le déplacement final, sans avoir égard au mouvement par lequel on l'obtient.

Je dirai qu'un déplacement hélicoïdal est la moitié d'un autre déplacement hélicoïdal, si, l'axe étant le même pour tous deux, la translation et la rotation le long et autour de cet axe sont, pour le premier et le second respectivement, dans les rapports de 1 à 2.

Dans  $F_1$  prenons une droite  $D_1$  rencontrant l'axe  $A_{1,2}$  à angle droit. La droite homologue, dans  $F_2$ , est de même une droite  $D$  rencontrant l'axe à angle droit. Ces deux droites  $D$  et  $D_1$  ont un axe de symétrie et un seul, quand on suppose ces droites caractérisées non seulement par leurs positions, mais encore par des directions choisies sur chacune d'elles. Les directions étant choisies ici homologues, l'axe de symétrie est une droite  $D_2$ , rencontrant l'axe  $A_{1,2}$  à angle droit, et sur laquelle viendrait s'appliquer  $D_1$  par le déplacement  $\frac{1}{2}(A_{1,2})$ , moitié du déplacement  $(A_{1,2})$  changeant  $F_1$  en  $F_2$ .

Faisons tourner la figure  $F_1$  d'une demi-circonférence autour de  $D_1$ , nous obtenons une figure  $F$ . Les droites  $D_1$  et  $A_{1,2}$  de  $F_1$  ont pour homologues, dans  $F$ , les droites  $D_1$  et  $A'_{1,2}$ , cette dernière n'étant autre que  $A_{1,2}$  changée de sens.

Faisons ensuite tourner  $F$  d'une demi-circonférence autour de  $D_2$ ; nous obtenons une figure égale, dans laquelle les homologues de  $D_1$  et  $A'_{1,2}$  sont  $D$  et  $A_{1,2}$ , puisque  $D$  est symétrique de  $D_1$ , par rapport à  $D_2$ . Cette dernière figure est, par conséquent,  $F_2$ . J'ai donc la proposition suivante :

*Soit un déplacement hélicoïdal  $(A_{1,2})$  changeant une figure  $F_1$  en une figure  $F_2$ . Prenons une droite  $D_1$  rencontrant à angle droit l'axe du déplacement, et la droite  $D_2$ , sur laquelle viendra s'appliquer  $D_1$  par le déplacement  $\frac{1}{2}(A_{1,2})$ . Les symétriques de  $F_1$  et  $F_2$  prises*

*respectivement par rapport à  $D_1$  et  $D_2$  coïncident entre elles.*

Prenons maintenant une nouvelle position  $F_3$  de la même figure, en donnant à  $F_2$  un déplacement hélicoïdal ( $A_{23}$ ) autour d'un autre axe. Les figures  $F_2$  et  $F_3$  seront de même les symétriques d'une figure  $F'$  par rapport à deux axes  $D'_2$ ,  $D_3$ . Mais  $D_2$  et  $D'_2$  peuvent être arbitrairement choisies parmi les droites qui rencontrent à angle droit l'une  $A_{12}$ , l'autre  $A_{23}$ . On peut donc faire coïncider  $D_2$  et  $D'_2$ , en choisissant la perpendiculaire commune à  $A_{12}$  et  $A_{23}$ . Alors  $F$  et  $F'$  coïncident, et  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  sont symétriques d'une seule et même figure  $F$ , respectivement par rapport à trois droites  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ .

Soit maintenant  $A_{13}$  la perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_3$ . Cette droite, envisagée dans  $F$ , a pour homologue  $A'_{13}$ , c'est-à-dire elle-même, mais changée de sens, aussi bien dans  $F_1$  que dans  $F_3$ . Ainsi  $A_{13}$ , considérée soit dans  $F_1$ , soit dans  $F_3$ , est à elle-même sa propre homologue. Elle est donc l'axe d'un déplacement hélicoïdal changeant  $F_1$  en  $F_3$ . Ce déplacement est le résultant des deux précédents, et il est manifeste que le demi-déplacement  $\frac{1}{2}(A_{13})$  est celui qui change  $D_1$  en  $D_3$ . Ainsi :

*Soient deux déplacements hélicoïdaux, ayant pour axes  $A_{12}$  et  $A_{23}$ .*

*Soient :*

$D_2$  *la perpendiculaire commune à ces deux axes ;*

$D_1$  *la droite qui est amenée sur  $D_2$  par le demi-déplacement  $\frac{1}{2}(A_{12})$  ;*

$D_3$  *la droite sur laquelle est amenée  $D_2$  par le demi-déplacement  $\frac{1}{2}(A_{23})$  ;*

*Les deux déplacements ( $A_{12}$ ), ( $A_{23}$ ), étant opérés successivement et dans cet ordre, équivalent à un déplacement hélicoïdal unique ( $A_{13}$ ), dont l'axe est la per-*



perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_3$ . Le demi-déplacement  $\frac{1}{2}(A_{13})$  est celui qui amène  $D_1$  sur  $D_3$  <sup>(1)</sup>.

Deux droites dirigées ayant, comme je l'ai observé plus haut, un axe de symétrie, on peut amener en coïncidence deux droites homologues de deux figures égales par une rotation. Il est donc évident que tout déplacement peut être obtenu, d'une infinité de manières, par deux déplacements hélicoïdaux successifs. La dernière proposition donne donc le théorème fondamental :

*Tout déplacement dans l'espace équivaut à un déplacement hélicoïdal.*

En conséquence, dans le raisonnement ci-dessus,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  sont trois positions tout à fait arbitraires d'une même figure, et la proposition de M. Stephanos se généralise ainsi :

*Trois positions quelconques d'une même figure dans l'espace sont les symétriques d'une seule et même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.*

*Chaque axe de symétrie est la perpendiculaire commune aux axes de deux des déplacements hélicoïdaux qui amènent les figures données les unes sur les autres.*

(<sup>1</sup>) Pour le cas particulier de deux rotations autour d'axes qui se rencontrent, on retrouve le résultat démontré par M. Brisse dans son Mémoire *Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 142).



## SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT D'UN POINT ;

point. Le lieu des points V sera une nouvelle courbe (V) que l'on peut considérer comme la trajectoire de l'extrémité V de la vitesse du point M <sup>(1)</sup>; soit  $v_1 = \overline{VV_1}$  la vitesse du point V dans ce mouvement sur (V). Proposons-nous de chercher la relation entre les deux vitesses  $v$  et  $v_1$ .

A cet effet, soient M', M'' deux points de (M) infiniment voisins de M et M'V' =  $v'$  la vitesse du mobile en M'. Joignons VV'. Les lignes MM' =  $ds = v dt$  et VV' =  $ds_1 = v_1 dt$  sont les arcs élémentaires décrits simultanément pendant l'intervalle de temps  $dt$  par les deux points M et V. Portons à partir du point M la ligne MA égale et parallèle à M'V' et joignons VA et AV'. On sait que VA est, en grandeur et en direction, l'accélération élémentaire du point mobile en M; donc, en désignant par  $\varphi$  l'accélération totale de ce point,  $VA = \varphi dt$ . Enfin AV' est égal et parallèle à MM', puisque la figure MM'V'A est un parallélogramme. Dans le triangle VAV', le côté VV' est la *somme géométrique* des côtés VA, AV'; on a donc l'équation géométrique <sup>(2)</sup>

$$\overline{v_1 dt} = \overline{\varphi dt} + \overline{v dt},$$

d'où

$$(1) \quad \overline{v_1} = \overline{v} + \overline{\varphi},$$

(<sup>1</sup>) La courbe (V) ne paraît pas avoir été spécialement étudiée en Cinématique. La loi de la variation de la vitesse en grandeur et en direction a été représentée par une autre courbe introduite par Hamilton sous le nom de *hodographe*. C'est surtout le système particulier des *coordonnées tangentielles polaires*, proposées par M. HABICH, qui se prête naturellement à l'étude de cette ligne (V). Voir HABICH, *Études cinématiques*, année 1879, p. 7-12. Les formules générales (24), (33) et (60) de la première Partie de cet Ouvrage embrassent nos équations (2) et (6) comme cas particuliers.

(<sup>2</sup>) Pour la définition des opérations géométriques et les notations employées, voir RESAL, *Traité de Cinématique pure*, p. 18.

c'est-à-dire que :

*La vitesse du point V est la résultante ou somme géométrique de la vitesse et de l'accélération totale du point mobile (1).*

3. La propriété trouvée par M. d'Ocagne est un des corollaires du dernier théorème. En effet, décomposons la vitesse  $v_1$  en deux composantes  $v_{1,T}$ ,  $v_{1,N}$ , dirigées l'une suivant la tangente MV ou T et l'autre suivant la normale principale N à la trajectoire (M) en M. Cette décomposition est toujours possible, car les droites  $v_1$ , T et N sont situées dans un même plan, le plan osculateur de (M) en M. On aura, en vertu de la relation (1),

$$(a) \quad \begin{cases} v_{1,T} = v_1 \cos(v_1, T) = \varphi \cos(\varphi, T) + v \cos(v, T), \\ v_{1,N} = v_1 \cos(v_1, N) = \varphi \cos(\varphi, N) + v \cos(v, N). \end{cases}$$

Or, la direction T étant prise dans le sens du mouvement,

$$\cos(v, T) = 1, \quad \cos(v, N) = 0;$$

de plus, en désignant par  $\varphi_T$ ,  $\varphi_N$  les accélérations tangentielle et normale, c'est-à-dire les composantes de  $\varphi$  suivant les directions T, N, et par  $\rho$  le rayon de courbure de (M) en M, on a

$$(b) \quad \varphi \cos(\varphi, T) = \varphi_T = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi \cos(\varphi, N) = \varphi_N = \frac{v^2}{\rho}.$$

(1) D'après la relation (1), on peut encore définir l'accélération totale dans le mouvement d'un point comme la différence géométrique des vitesses du point V et du point considéré, puisque de (1) on tire  $\bar{\varphi} = \bar{v}_1 - \bar{v}$ . Cette équation géométrique ou la relation (1) peut aussi être regardée comme une conséquence de ce théorème général dû à Somoff : *La première dérivée géométrique d'une valeur qui varie avec le temps en grandeur et en direction est la différence géométrique entre la vitesse de l'extrémité du vecteur et celle de son origine.* (Voir SOMOFF, *Theoretische Mechanik, aus dem russischen von Ziwet*, vol. 1: 1878.)

Il vient donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{1,T} = \varphi_T + v = \frac{dv}{dt} + v, \\ v_{1,N} = \varphi_N = \frac{v^2}{\rho}. \end{array} \right.$$

Ces formules (2) expriment la propriété démontrée par M. d'Ocagne pour le cas particulier d'une trajectoire plane.

4. Puisque, d'après les formules (a),

$$v_1^2 = v_1^2 T + v_{1,N}^2, \quad \tan(v_1, T) = \frac{v_{1,N}}{v_{1,T}},$$

on trouve, en vertu des relations (2) et (b),

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1^2 = \varphi^2 + v^2 + 2 v \varphi_T = \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + 2 v \frac{dv}{dt} + \frac{v^4}{\rho^2} + v^2, \\ \tan(v_1, T) = \frac{\varphi_N}{\varphi_T + v} = \frac{v^2}{\rho \left( v + \frac{dv}{dt} \right)}. \end{array} \right.$$

Lorsque le mouvement sur (M) est uniforme,  $v$  est constant, et l'on a

$$v_{1,T} = v, \quad v_{1,N} = \frac{v^2}{\rho}, \quad v_1 = v \sqrt{\frac{v^2}{\rho^2} + 1}, \quad \tan(v_1, T) = \frac{v}{\rho}.$$

La tangente de l'angle des vitesses  $v_1$ ,  $v$  varie en raison inverse du rayon de courbure de la trajectoire (M). Si le mouvement uniforme est circulaire, cet angle et la vitesse  $v_1$  sont constants.

Lorsque le mouvement est rectiligne,  $\rho = \infty$  et

$$v_{1,N} = 0, \quad v = v_{1,T} = \frac{dv}{dt} + v, \quad (v_1, T) = 0.$$

Enfin, si le mouvement est en même temps rectiligne



et uniforme, on aura

$$c_{1,T} = c, \quad c_{1,N} = 0, \quad c_1 = c, \quad (c_1, T) = 0.$$

5. La relation (1) n'est elle-même qu'un cas particulier d'un théorème plus général. Différentions cette relation géométriquement  $n$  fois par rapport au temps; en désignant généralement par  $\varphi^{(s)}$  et  $\varphi_1^{(s)}$  les accélérations totales d'ordre  $s$  des points M et V, et en observant que la  $n^{\text{ième}}$  dérivée géométrique de la vitesse est l'accélération totale d'ordre  $n$ , et la  $n^{\text{ième}}$  dérivée de l'accélération totale du premier ordre est l'accélération totale d'ordre  $n + 1$ , on obtient l'équation géométrique

$$(4) \quad \overline{\varphi_1^{(n)}} = \overline{\varphi^{(n+1)}} + \overline{\varphi^{(n)}}.$$

Donc : *la résultante de deux accélérations d'ordres successifs  $n$  et  $n + 1$  dans le mouvement d'un point est l'accélération d'ordre  $n$  du point V.*

A l'aide de la relation (4), il est facile de trouver les expressions des composantes  $\varphi_{1,T}^{(n)}$ ,  $\varphi_{1,N}^{(n)}$ ,  $\varphi_{1,B}^{(n)}$  de l'accélération  $\varphi_1^{(n)}$  d'un ordre quelconque  $n$  du point V le long de la tangente T, de la normale principale N et de la binormale B à la trajectoire (M), lorsque l'on connaît les expressions des composantes de  $\varphi^{(n)}$  et  $\varphi^{(n+1)}$  sur les mêmes directions. On obtiendra en général ces dernières composantes au moyen des formules récurrentes, dues à Somoff<sup>(1)</sup>.

6. Proposons-nous, par exemple, de trouver les composantes  $\varphi_{1,T}$ ,  $\varphi_{1,N}$ ,  $\varphi_{1,B}$  de l'accélération totale  $\varphi_1$  du premier ordre du point V. Pour  $n = 1$ , la formule (4)

---

(1) Voir SOMOFF, *Mémoire sur les accélérations de divers ordres* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, 7<sup>e</sup> série, t. VIII, n<sup>o</sup> 5), ou *Theoretische Mechanik*, Vol. I.

devient

$$(5) \quad \varphi_1 = \overline{\varphi^{(2)}} + \overline{\varphi},$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} \varphi_{1,T} &= \varphi_1 \cos(\varphi_1, T) \\ &= \varphi^{(2)} \cos(\varphi^{(2)}, T) + \varphi \cos(\varphi, T) = \varphi_T^{(2)} + \varphi_T, \\ \varphi_{1,N} &= \varphi_1 \cos(\varphi_1, N) \\ &= \varphi^{(2)} \cos(\varphi^{(2)}, N) + \varphi \cos(\varphi, N) = \varphi_N^{(2)} + \varphi_N, \\ \varphi_{1,B} &= \varphi_1 \cos(\varphi_1, B) \\ &= \varphi^{(2)} \cos(\varphi^{(2)}, B) + \varphi \cos(\varphi, B) = \varphi_B^{(2)} + \varphi_B. \end{aligned}$$

Mais, d'après des formes connues (2),

$$\begin{aligned} \varphi_T^{(2)} &= \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}, & \varphi_T &= \frac{dv}{dt}, \\ \varphi_N^{(2)} &= \frac{d\left(\frac{v^2}{\rho}\right)}{dt} + \frac{v}{\rho} \frac{dv}{dt}, & \varphi_N &= \frac{v^2}{\rho}, \\ \varphi_B^{(2)} &= \frac{v^3}{r\rho}, & \varphi_B &= 0, \end{aligned}$$

$r$  désignant le rayon de torsion de la trajectoire (M).  
On trouve donc pour les composantes cherchées de  $\varphi_1$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{1,T} &= \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho^2}, \\ \varphi_{1,N} &= \frac{d\left(\frac{v^2}{\rho}\right)}{dt} + \frac{v^2}{\rho} + \frac{v}{\rho} \frac{dv}{dt}, \\ \varphi_{1,B} &= \frac{v^3}{r\rho}. \end{aligned} \right.$$

7. Posons, dans la formule (4), successivement  $n=1$ ,

2, 3, . . . .  $m$ ; il vient

$$\begin{aligned}\overline{\varphi_1} &= \overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi}, & \overline{\varphi_1^{(2)}} &= \overline{\varphi_1^{(3)}} + \overline{\varphi_1^{(2)}}, \\ \overline{\varphi_1^{(3)}} &= \overline{\varphi_1^{(4)}} + \overline{\varphi_1^{(3)}}, & \dots, & \overline{\varphi_1^{(m)}} &= \overline{\varphi_1^{(m+1)}} + \overline{\varphi_1^{(m)}},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit facilement les relations

$$(7) \left\{ \begin{aligned} &\overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(3)}} + \dots + \overline{\varphi_1^{(m)}} \\ &= \overline{\varphi} + \overline{\varphi_1^{(m+1)}} + 2(\overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(3)}} + \overline{\varphi_1^{(4)}} + \dots + \overline{\varphi_1^{(m)}}), \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \overline{\varphi_1} - \overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(3)}} - \overline{\varphi_1^{(4)}} + \overline{\varphi_1^{(5)}} - \dots \mp \overline{\varphi_1^{(m)}} = \overline{\varphi} \mp \overline{\varphi_1^{(m+1)}};$$

dans la dernière équation on prendra le signe — lorsque le nombre  $m$  est pair et *vice versa*. Enfin, de ces deux dernières relations on conclut encore la suivante

$$(9) \left\{ \begin{aligned} &\overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(4)}} + \overline{\varphi_1^{(6)}} + \dots + \overline{\varphi_1^{(m+1)}} \\ &= \overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(3)}} + \overline{\varphi_1^{(4)}} + \dots + \overline{\varphi_1^{(m)}} + \overline{\varphi_1^{(m)}}, \\ \text{ou} \\ &\overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(4)}} + \overline{\varphi_1^{(6)}} + \dots + \overline{\varphi_1^{(m-1)}} \\ &= \overline{\varphi_1^{(2)}} + \overline{\varphi_1^{(3)}} + \overline{\varphi_1^{(4)}} + \dots + \overline{\varphi_1^{(m)}} \end{aligned} \right.$$

selon que  $m$  est pair ou impair. L'interprétation des formules (7), (8) et (9) ne présente aucune difficulté.

## SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ASTATIQUE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Considérons un solide  $S$  dont plusieurs points  $M_1, M_2, \dots$  sont sollicités par des forces données  $F_1, F_2, \dots$  constantes en grandeur et en direction, quelle que soit la position du solide; un des premiers problèmes qui se

présentent est la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les forces  $F_i$  se fassent équilibre dans toutes les positions de  $S$ , c'est-à-dire pour qu'il y ait *équilibre astatique*. Le cas où les forces sont parallèles est extrêmement simple; mais il est facile d'y ramener le cas où elles ont des directions diverses, et il me semble que cette réduction donne un moyen des plus commodes et des plus naturels pour obtenir les douze équations de l'équilibre astatique.

Quand les forces  $F_i$  sont parallèles à une droite  $OA$ , elles ont en général une résultante qu'on peut regarder comme appliquée en un point fixe de  $S$ , quelle que soit l'orientation du solide; cette résultante est égale à la somme algébrique des  $F_i$ , en regardant comme positives celles qui agissent dans le sens  $OA$ , comme négatives celles qui agissent dans le sens opposé. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que cette somme soit nulle, mais cela ne suffit pas; les forces qui agissent dans le sens de  $OA$  peuvent être remplacées par une résultante  $R$  appliquée en un point déterminé  $a$  de  $S$ , les autres par une résultante  $R'$ , appliquée en un point  $a'$ , égale à  $R$ , mais de direction opposée; le couple  $(R, R')$ , équivalent au système des forces données, ne sera en équilibre que si le solide est orienté de telle sorte que  $aa'$  soit parallèle à  $OA$ ; pour qu'il y ait équilibre astatique, il faut et il suffit que les points  $a$  et  $a'$  soient confondus de manière que  $R$  et  $R'$  soient toujours directement opposées. Prenons trois axes  $Ox, Oy, Oz$ , et soient, dans une position quelconque du solide,  $x_i, y_i, z_i$  les coordonnées du point  $M_i$ ; la coïncidence des points  $a$  et  $a'$  s'exprime par les trois équations bien connues

$$(1) \quad \sum F_i x_i = 0, \quad \sum F_i y_i = 0, \quad \sum F_i z_i = 0.$$

Supposons maintenant que les forces aient des direc-



tions différentes, et cherchons les conditions de l'équilibre astatique. Il faut d'abord que la résultante de translation, indépendante de la position de  $S$ , soit nulle; prenons encore trois axes de coordonnées et décomposons chacune des forces  $F_i$  en trois forces  $X_i, Y_i, Z_i$  parallèles à ces axes; la somme algébrique des composantes parallèles à chacune des trois directions devant être nulle, nous avons les trois premières équations de l'équilibre astatique

$$(2) \quad \Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0,$$

La première de ces relations montre que, parmi les forces  $X_i$ , les unes agissent dans le sens  $Ox$ , tandis que les autres, ayant une somme égale en valeur absolue à la somme des premières, agissent dans le sens opposé; ces deux systèmes de composantes peuvent être remplacés respectivement par deux résultantes  $A$  et  $A'$ , égales et de sens contraires, appliquées en des points  $a, a'$  dont la position, par rapport au solide, est indépendante de son orientation. De même, les forces  $Y_i$  pourront être remplacées par deux forces  $B$  et  $B'$ , égales et de sens contraires, appliquées en des points déterminés,  $b$  et  $b'$ , de  $S$ ; les forces  $Z_i$  seront équivalentes à deux forces  $C, C'$ , égales et de sens contraires, appliquées aux points  $c, c'$  de  $S$ . Ainsi le système des forces  $F_i$  peut toujours être remplacé par trois couples dont les bras  $aa', bb', cc'$  ont une position déterminée dans le solide, mais non dans l'espace; je dis qu'il ne saurait y avoir équilibre astatique que si les points  $a, b, c$  coïncident respectivement avec  $a', b', c'$ .

Nous allons voir en effet que si les distances  $aa', bb', cc'$  ne sont pas toutes trois nulles, on peut amener le solide dans une position telle que les six forces  $A, A', B, B', C, C'$  ne se fassent pas équilibre. Orientons d'abord  $S$  de

manière que  $aa'$  soit parallèle à  $Ox$ ; les forces  $A$  et  $A'$  seront directement opposées, et il faudra, pour que  $S$  soit en équilibre, que les couples  $(B, B')$ ,  $(C, C')$  se fassent équilibre; or cela exige d'abord que ces couples agissent dans des plans parallèles, et puisque  $B$  et  $B'$  sont parallèles à  $Oy$ ,  $C$  et  $C'$  à  $Oz$ , les plans des deux couples devront être parallèles à  $Oyz$ ; il faut donc que les droites  $bb'$ ,  $cc'$  soient parallèles à ce plan. Si les axes de coordonnées sont obliques, il suffira de faire tourner  $S$ , et avec lui  $bb'$  et  $cc'$ , autour de  $aa'$ , pour détruire le parallélisme des droites  $bb'$  et  $cc'$  avec  $Oyz$ , et rendre impossible l'équilibre des deux couples; si les axes sont rectangulaires et si  $bb'$ ,  $cc'$  sont parallèles à  $Oyz$ , je fais tourner  $S$  autour de  $aa'$  de manière que  $bb'$  devienne parallèle à  $Oz$ ; les plans des deux couples sont parallèles, mais il faut encore que leurs moments soient égaux et de signes contraires; si cette condition est satisfaite, il suffira, comme le montre une figure simple, de faire tourner le solide de  $180^\circ$  autour de  $bb'$  pour changer de signe le moment du couple formé par  $C$  et  $C'$ , tandis que celui du couple  $(B, B')$ , qui n'est pas nul, ne changera pas, et que la droite  $aa'$  restera parallèle à  $Ox$ , en sorte qu'il n'y aura plus équilibre. Dans le cas où l'une des distances  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , ou deux d'entre elles seraient nulles, des considérations analogues aux précédentes, mais bien plus simples, montreraient qu'on peut toujours orienter  $S$  de manière qu'il n'y ait pas équilibre.

La coïncidence des points  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$ ,  $c$  et  $c'$ , nécessaire pour l'équilibre astatique, est suffisante; car, si elle a lieu, les couples  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$  auront toujours des moments égaux à zéro, et dans toutes les positions du solide, les systèmes des  $X_i$ , des  $Y_i$ , des  $Z_i$  se feront séparément équilibre. Il suffit d'appliquer à chacun de ces systèmes les relations (1) pour avoir neuf

équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma X_i x_i = 0, \quad \Sigma X_i y_i = 0, \quad \Sigma X_i z_i = 0, \\ \Sigma Y_i x_i = 0, \quad \Sigma Y_i y_i = 0, \quad \Sigma Y_i z_i = 0, \\ \Sigma Z_i x_i = 0, \quad \Sigma Z_i y_i = 0, \quad \Sigma Z_i z_i = 0. \end{array} \right.$$

qui, avec les équations (2), nous donneront les douze équations de l'équilibre astatique.

Quand ces équations ne sont pas satisfaites, on peut se demander combien il faudrait introduire de forces analogues aux  $F_i$  pour assurer l'équilibre astatique; il est aisé de voir que deux forces ne suffisent pas en général. Prenons des axes tels que  $\Sigma X_i$  et  $\Sigma Y_i$  soient nuls, et soient  $X, Y, Z, X', Y', Z'$  les composantes des deux forces cherchées  $F$  et  $F'$ ,  $x, y, z, x', y', z'$  les coordonnées de leurs points d'application; écrivons, en adjoignant les forces  $F$  et  $F'$  aux  $F_i$ , les deux premières équations (2), et les première, deuxième, quatrième et cinquième du groupe (3) :

$$\begin{aligned} X + X' &= 0, & Y + Y' &= 0, \\ \Sigma X_i x_i + Xx + X'x' &= 0, & \Sigma X_i y_i + Xy + X'y' &= 0, \\ \Sigma Y_i x_i + Yx + Y'x' &= 0, & \Sigma Y_i y_i + Yy + Y'y' &= 0. \end{aligned}$$

Entre ces équations on peut éliminer  $X, X', Y, Y', x, x', y, y'$ , et l'on trouve

$$\frac{\Sigma X_i x_i}{\Sigma X_i y_i} = \frac{\Sigma Y_i x_i}{\Sigma Y_i y_i},$$

condition qui n'est généralement pas satisfaite avec les forces proposées.

Au contraire, on peut, d'une infinité de manières, trouver trois forces qui tiennent constamment en équilibre les forces  $F_i$  quand leur résultante de translation n'est pas nulle. Choisissons les axes coordonnés de telle sorte que

$\Sigma X_i, \Sigma Y_i, \Sigma Z_i$  soient différents de zéro ; on peut remplacer le système des  $X_i$  par une force  $A$  appliquée en un point déterminé  $a$  de  $S$  ; de même, les systèmes des  $Y_i$  et des  $Z_i$  seront toujours respectivement équivalents à deux forces  $B, C$  agissant sur deux points  $b$  et  $c$  convenablement choisis dans  $S$ . Cela posé, il est clair que, si aux forces  $F_i$  on associe trois forces, —  $A$ , —  $B$ , —  $C$  appliquées en  $a, b, c$ , on établira l'équilibre astatique.

Quand la résultante de translation des  $F_i$  est nulle, le système est équivalent au système de trois couples  $(A, A')$   $(B, B')$ ,  $(C, C')$  dont les bras ont, par rapport à  $S$ , une position déterminée ; si l'on introduit trois couples dont les forces et les bras soient respectivement parallèles aux forces et aux bras des trois premiers, avec des moments égaux et de signes contraires, on aura encore un équilibre astatique.

## SUR UNE INTÉGRALE DOUBLE ;

PAR M. GÉRASSIME ORLOW.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur une intégrale double* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. VII, 1870), Didon montre que la valeur de l'intégrale double

$$(1) \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1} (1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1-2by+b^2)^{-\frac{\mu}{2}} dx dy,$$

dans laquelle les variables  $x$  et  $y$  sont limitées par la condition  $x^2+y^2 \leq 1$ , ne dépend que du produit  $ab$ , dans le cas où  $\mu$  est un nombre entier positif quelconque et où  $a$  et  $b$  sont moindres que l'unité.



Il déduit cette proposition des formules suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iint (1 - x^2 - y^2)^{p - \frac{1}{2}} (1 - 2ax + a^2)^{-p - \frac{1}{2}} \\ & \quad \times (1 - 2by + b^2)^{-p - \frac{1}{2}} dx dy \\ & = 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{(ab)^{2m}}{m! 2^m} \frac{(2p+1)(2p+3)\dots(2p+2m-1)}{4m+3p+1} \\ & \iint (1 - x^2 - y^2)^{p-1} (1 - 2ax + a^2)^{-p} \\ & \quad \times (1 - 2by + b^2)^{-p} dx dy \\ & = \frac{\pi}{(p-1)!} \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{2m+p} \end{aligned} \right.$$

où  $p$  et  $m$  sont également des nombres entiers et positifs.

Nous nous proposons de montrer que la proposition de Didon sur l'intégrale (1) subsiste aussi, dans le cas de  $\mu$  fractionnaire positif, et que les formules (2) que cet auteur établit indépendamment l'une de l'autre ne sont que deux cas particuliers d'une même formule, que nous déduirons du développement de l'intégrale (1) en série.

Introduisant, au lieu de  $\mu$ , un nouveau paramètre, en posant

$$\mu = 2\alpha + 1,$$

nous aurons  $\alpha > -\frac{1}{2}$ , eu égard à la condition  $\mu > 0$ ; et, en même temps, l'intégrale (1) devient

$$(3) \quad \iint (1 - x^2 - y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{2\alpha-1}{2}} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} dx dy.$$

Les résultats que nous avons en vue résultent de la considération de certaines fonctions  $\omega(x, y)$ , définies

par l'équation

$$(4) \quad (1 - 2ax + a^2)^{\frac{2\alpha+1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=\infty} a^l \omega_l(x, \alpha).$$

où les valeurs numériques de  $a$  et  $x$  ne surpassent pas l'unité, et  $\alpha$  est un paramètre tout à fait arbitraire. La fonction  $\omega_l(x, \alpha)$  est un polynôme en  $x$ , du degré  $l$ , qui se présente sous l'une des formes suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_l(x, \alpha) \\ = \frac{(2\alpha+1) \dots (2\alpha+2l-1)}{l!} \left[ x^l - \frac{l(l-1)}{2(2\alpha+2l-1)} x^{l-2} \dots \right]. \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \omega_l(x, \alpha) = c_l \frac{1}{(x^2-1)^\alpha} \frac{d^l (x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

où

$$(7) \quad c_l = \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3) \dots (2\alpha+2l-1)}{l!} \frac{\Gamma(2\alpha+l+1)}{\Gamma(2\alpha+2l+1)}.$$

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$(8) \quad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha \omega_l(x, \alpha) x^p dx.$$

Au moyen de la formule (6), on obtient

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha \omega_l(x, \alpha) x^p dx \\ = (-1)^\alpha c_l \int_{-1}^{+1} x^p \frac{d^l (x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} dx. \end{array} \right.$$

Mais si dans la formule élémentaire

$$\int U \frac{d^q V}{dx^q} dx = \Theta + (-1)^q \int V \frac{d^q U}{dx^q} dx,$$

où

$$\Theta = U \frac{d^{q-1} V}{dx^{q-1}} - \frac{dU}{dx} \frac{d^{q-2} V}{dx^{q-2}} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{d^{q-1} U}{dx^{q-1}} V,$$

et

$$V = (x^2 - 1)^{\alpha+l}, \quad q = l,$$

et observant que, aux limites  $x = -1$  et  $x = +1$ , la quantité  $\Theta$  s'évanouit sous la condition  $\alpha > -1$ , on trouvera l'égalité

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} U \frac{d^l (x^2 - 1)^{\alpha+l}}{dx^l} dx \\ & = (-1)^l \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{\alpha+l} \frac{d^l U}{dx^l} dx, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire, en faisant  $U = x^p$  et  $p < l$ ,

$$\int_{-1}^{+1} x^p \frac{d^l (x^2 - 1)^{\alpha+l}}{dx^l} dx = 0.$$

Ainsi, pour  $\alpha > -1$ , l'intégrale (8) se réduit à zéro, pour toute valeur entière et positive de l'exposant  $p$ , inférieure à  $l$ .

On en conclut que,  $\varphi(x)$  désignant un polynôme entier, on aura

$$(11) \quad \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^\alpha \omega_l(x, \alpha) \varphi(x) dx = 0,$$

toutes les fois que le degré du polynôme  $\varphi(x)$  est inférieur à  $l$ , et  $\alpha > -1$ .

En supposant  $p \geq l$ ,  $U = x^p$ , au moyen des formules (9) et (10), on obtient l'égalité

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^\alpha \omega_l(x, \alpha) x^p dx \\ & = c_l p(p-1) \dots (p-l+1) \int_{-1}^{+1} x^{p-l} (1 - x^2)^{\alpha+l} dx, \end{aligned} \right.$$

qui montre que l'intégrale (8) est encore nulle pour  $p \geq l$ , lorsque la différence  $p - l$  est un nombre impair.

Si la différence  $p - l$  est un nombre pair, la dernière intégrale s'exprimera au moyen de la fonction  $\Gamma$ , c'est-à-dire

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} x^{p-l} (1-x^2)^{\alpha+l} dx \\ & = \frac{1.3.5 \dots (p-l-1) 2^{2\alpha+2l+1}}{(2\alpha+2l+1)(2\alpha+2l+3) \dots (2\alpha+l+p+1)} \frac{\Gamma^2(\alpha+l+1)}{\Gamma(2\alpha+2l+1)}. \end{aligned} \right.$$

En portant cette valeur trouvée de l'intégrale dans l'équation (12), et substituant à la constante  $c_l$  sa valeur (7), on trouve, après quelques simplifications, la formule suivante :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^2 \omega_l(x, \alpha) x^p dx \\ & = \frac{p!}{2^{\frac{p-l}{2}} \left(\frac{p-l}{2}\right)! l!} \frac{2^{2\alpha+l} \Gamma(2\alpha+l+1)}{(2\alpha+1) \dots (2\alpha+l+p+1)} \left[ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \right]^2. \end{aligned} \right.$$

Je considère en second lieu l'intégrale double

$$(15) \quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \omega_l(x, \alpha) \omega_p(y, \alpha) dx dy,$$

étendue aux valeurs des variables  $x$  et  $y$  telles que  $x^2 + y^2 \leq 1$  et je vais faire voir que, pour  $\alpha > -\frac{1}{2}$ , cette intégrale est nulle, toutes les fois que les nombres  $l$  et  $p$  diffèrent entre eux. La proposition est évidente si l'un des nombres  $l$  et  $p$ , ou tous deux à la fois, sont impairs. Il ne reste ainsi qu'à démontrer notre proposition dans le cas  $l = 2m, p = 2n$ ;  $m$  et  $n$  sont des nombres entiers positifs et inégaux. A cet effet, je me propose d'abord de déterminer la valeur de l'intégrale

$$(16) \quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha) y^{2n} dx dy,$$

dans laquelle les variables satisfont toujours à la con-



dition  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Si l'on introduit, au lieu de  $y$ , une nouvelle variable  $t$ , en posant  $y = t\sqrt{1-x^2}$ , on aura

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} y^{2n} dy \\ &= 2(1-x^2)^{\alpha+n} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} t^{2n} dt; \end{aligned}$$

l'intégrale au second membre, sous la condition  $\alpha > -\frac{1}{2}$ , s'exprime au moyen de la fonction  $\Gamma$ , de sorte que la seconde partie est égale à

$$\frac{\pi}{2^{2\alpha+n+1}} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \frac{\Gamma(2x+1)}{\Gamma^2(x+1)};$$

par conséquent l'intégrale (16) se réduit à

$$\begin{aligned} & (-1)^n \frac{\pi}{2^{2\alpha+n}} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \frac{\Gamma(2x+1)}{\Gamma^2(x+1)} \\ & \times \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha \omega_{2m}(x, x) (x^2-1)^n dx, \end{aligned}$$

et par suite, d'après la formule (11), elle est nulle, si  $n$  est inférieur à  $m$ , car  $(x^2-1)^n$  est un polynôme de degré  $2n$ ; de plus, dans le cas  $n = m$ , on trouve, au moyen de la formule (14), après des réductions faciles qu'elle se réduit à

$$(-1)^m 2\pi \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{(2x+2m+1)(2x+2m+3)\dots(2x+4m+1)}.$$

On en conclut que,  $\varphi(y)$  désignant un polynôme de degré  $2n$  et  $a$  le coefficient de  $y^{2n}$  dans ce polynôme, on aura, pour  $n < m$ ,

$$(17) \quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, x) \varphi(y) dx dy = 0.$$

et pour  $n = m$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha) \varphi(y) dx dy \\ & = (-1)^m a 2\pi \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3) \dots (2\alpha+4m+1)}. \end{aligned} \right.$$

Posant, dans (17),  $\varphi(y) = \omega_{2n}(y, \alpha)$ , on trouve l'égalité

$$(19) \quad \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha) \omega_{2n}(y, \alpha) dx dy = 0,$$

qu'il s'agissait d'établir, et qui s'applique évidemment toutes les fois que les indices  $m$  et  $n$  sont inégaux, car alors l'un des deux est toujours plus grand que l'autre.

Posant également, dans (18),  $\varphi(y) = \omega_{2m}(y, \alpha)$ , et, eu égard à l'expression (5), on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} & \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \omega_{2m}(x, \alpha) \omega_{2m}(y, \alpha) dx dy \\ & = (-1)^m \frac{2\pi}{m! 2^m} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3) \dots (2\alpha+2m-1)}{2\alpha+4m+1}, \end{aligned}$$

au moyen de laquelle on peut déterminer la valeur de l'intégrale cherchée (3). A cet effet, multipliant l'équation précédente par  $(ab)^{2m}$ , puis donnant à  $m$  toutes les valeurs de  $m=0$  à  $m=\infty$ , et faisant la somme, on trouve, vu les équations (4) et (19), le résultat suivant :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iint (1-x^2-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} (1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} (1-2by+b^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} dx dy \\ & = 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{(ab)^{2m}}{m! 2^m} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3) \dots (2\alpha+2m-1)}{2\alpha+4m+1}, \end{aligned} \right.$$

ce qui fait voir que la valeur de l'intégrale double (3) ne dépend que du produit  $ab$ , sous la seule condition  $\alpha > -\frac{1}{2}$ .

Chacune des formules (2) est un cas particulier de la formule générale (20). Effectivement, en premier lieu, donnant à  $\alpha$ , dans la formule (20), une valeur entière, positive quelconque  $p$ , on a évidemment la première des formules (2). En second lieu, faisant  $\alpha = \frac{2p-1}{2}$  dans la même formule (20), le second membre devient

$$\frac{\pi}{(p-1)!} \sum_{m=0}^{m=\infty} (-m)^m (ab)^{2m} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{2m+p},$$

et la formule même se réduit à la seconde des formules (2).

## GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BRIANCHON ET DE L'HEXAGONE DE PASCAL;

PAR M. E. BRASSINNE.

**THÉORÈME I.** — *Un polygone de  $2n$  côtés est circonscrit à une conique, si  $n-1$  diagonales consécutives, joignant chacune deux sommets opposés, se coupent en un même point; la  $n^{\text{ième}}$  diagonale passera aussi par ce point.*

**THÉORÈME II.** — *Si un polygone de  $2n$  côtés inscrit dans une conique est tel que  $n-1$  systèmes de deux côtés opposés consécutifs se coupent suivant une ligne droite, le  $n^{\text{ième}}$  système se coupera aussi sur cette droite.*

Il suffira d'établir le théorème (I) dans le cas de l'octogone circonscrit à la conique. Les huit premiers chiffres désignent les équations des côtés consécutifs du polygone,

$c_1, c_2, c_3, c_4$  les équations des quatre cordes qui joignent deux à deux les points de contact des côtés opposés.

L'équation de la conique aura les quatre formes suivantes

$$\lambda(1,5) + c_1^2 = 0, \quad \lambda'(2,6) + c_2^2 = 0,$$

$$\lambda''(3,7) + c_3^2 = 0, \quad \lambda'''(4,8) + c_4^2 = 0.$$

Un système quelconque de valeurs de  $x, y$  rend tous les premiers membres identiques pour les coordonnées des points de rencontre des côtés 1, 2 et 5, 6; on a

$$c_1 = c_2,$$

par la raison que

$$c_1 = \mp \sqrt{\lambda(1,5)} \quad \text{et} \quad c_2 = \mp \sqrt{\lambda'(2,6)}$$

et que les seconds membres sont nuls. Pour les équations des quatre diagonales qui joignent les sommets opposés, on trouve

$$c_1 = c_2, \quad c_2 = c_3, \quad c_3 = c_4, \quad c_4 = c_1;$$

si les trois premières sont satisfaites par les coordonnées  $x, y$  d'un même point, il en sera de même de la quatrième.

Les expressions de  $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$  déduites des relations précédentes, qui sont du second degré, se rapportent à deux figures différentes. Si, par exemple, dans le cas de l'hexagone circonscrit, on prolonge jusqu'à leur rencontre les côtés 1, 3; 4, 6 ou 2, 4; 5, 1, ou 3, 5; 6, 2, on forme trois quadrilatères dont les diagonales se coupent au même point. Leurs extrémités sont les sommets d'un nouveau polygone circonscrit à la conique.



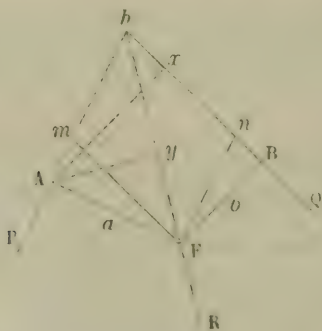
## MANIÈRE DIRECTE DE RAMENER LA COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES A LA THÉORIE DU LEVIER ;

PAR M. E. BRASSINNE.

Archimède, pour établir la théorie de la composition des forces parallèles, part de ce principe, qu'il regarde comme un fait d'expérience :

*Si une droite rigide, ou un levier horizontal, est sollicitée à ses extrémités par des poids égaux de directions parallèles, l'appui du levier placé en son milieu, supporte une charge égale à la somme des deux poids.*

Galilée le premier a considéré le levier coudé AFB, dont les bras,  $a$ ,  $b$  sont sollicités à leurs extrémités par des forces perpendiculaires  $P$ ,  $Q$ , et il a démontré que l'équilibre existe si  $P \cdot a = Q \cdot b$ . On ramène ce cas au



levier rectiligne d'Archimède, en prolongeant le bras  $a$  d'une longueur  $b'$  égale à  $b$  et en appliquant au levier  $bFb'$  des forces —  $Q$  et  $Q$  perpendiculaires à ses bras; des forces qui ne troublent point l'équilibre existant, et modifient seulement la pression de l'appui  $F$ .

Si actuellement les forces  $P$ ,  $Q$  prolongées agissent à

leur point de rencontre  $h$ , leur résultante  $R$  détruite par l'appui aura pour direction  $hF$ , et si l'on prend  $R$  en sens contraire, les forces  $P$ ,  $Q$ ,  $-R$  seront en équilibre, l'appui  $F$  restant libre. Si, de plus, on mène par ce point des parallèles  $Fm$ ,  $Fn$  à  $Q$ ,  $P$ , ces droites proportionnelles aux bras de levier  $a$ ,  $b$  pourront représenter les intensités de ces forces. Dans ces conditions, on peut supposer un appui au point  $A$ , et si l'on trace des perpendiculaires  $Ax$ ,  $Ay$  aux forces  $Q$ ,  $-R$ , ces droites reliées entre elles constituent un levier coudé en équilibre; et, d'après Galilée,  $Ax \cdot hn = Ay \cdot R$ , relation à laquelle on satisfait en faisant  $R = hF$ , puisque les deux produits mesurent le double de l'aire des triangles équivalents  $Ahn$ ,  $AhF$  de même base  $Ah$  et de même hauteur.

Ainsi, la seule loi du levier démontre que la résultante des deux forces  $P$ ,  $Q$  qui concourent en  $h$ , et dont les intensités sont  $hm$ ,  $hn$ , est en grandeur et en direction la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les forces.

## THÉORÈME RELATIF A UN CERTAIN RÉSEAU DE QUATRE SECTIONS CONIQUES;

PAR M. FRITZ HOFMANN, à Munich.

I. *Étant données un point fixe  $S$  et quatre droites fixes quelconques  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , dont aucune ne passe par le point  $S$  et qui ne passent pas toutes par un même point  $C$ ,  $D$ , si l'on construit quatre sections coniques  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  qui aient toutes le même point  $S$*

*Ann. de Mathém., 3<sup>e</sup> série, t. I (Juillet 1882).*

*pour foyer et telles que*

$K_1$	touche B, C, D en $\beta_1, \gamma_1, \delta_1,$
$K_2$	A, C, D en $\alpha_2, \gamma_2, \delta_2,$
$K_3$	A, B, D en $\alpha_3, \beta_3, \delta_3,$
$K_4$	A, B, C en $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4,$

*on a les relations*

$$\begin{aligned}(\gamma_1 \gamma_2) &= (\delta_1 \delta_2) = (\alpha_3 \alpha_4) = (\beta_3 \beta_4), \\(\gamma_1 \gamma_4) &= (\beta_1 \beta_4) = (\alpha_2 \alpha_3) = (\delta_2 \delta_3), \\(\gamma_2 \gamma_4) &= (\alpha_2 \alpha_4) = (\beta_1 \beta_3) = (\delta_1 \delta_3),\end{aligned}$$

*en désignant par  $(\gamma_1 \gamma_2)$  l'angle  $\gamma_1 S \gamma_2$  sous lequel la distance des deux points  $\gamma_1, \gamma_2$  est vue du point S.*

Par la condition énoncée il n'est pas exclu que trois des lignes A, B, C, D ne se coupent en un seul point P; alors une des sections coniques se réduit à ce point P.

II. On peut énoncer le même théorème sous une forme différente :

*Etant donnés trois droites quelconques A, B, C, un point fixe S et une section conique fixe  $K_3$  qui touche les deux droites A, B en  $\alpha_3, \beta_3$  et qui ait S pour foyer, quand on décrit pour une tangente quelconque mobile D de cette section conique  $K_3$  les deux sections coniques  $K_1, K_2$  de foyer S, et telles que*

$K_1$	touche B, C, D en $\beta_1, \gamma_1, \delta_1,$
$K_2$	A, C, D en $\alpha_2, \gamma_2, \delta_2,$

*la distance des deux points mobiles  $\delta_1, \delta_2$  sur la tangente mobile D est toujours vue sous le même angle du point S.*

Dans le mouvement de la tangente D, les lignes A, C, D peuvent passer par un même point P, et B, C, D

par un point  $P'$ . Pour ces positions-là une des sections coniques  $K_1, K_2$  dégénère en un point sans que la généralité du théorème soit altérée.

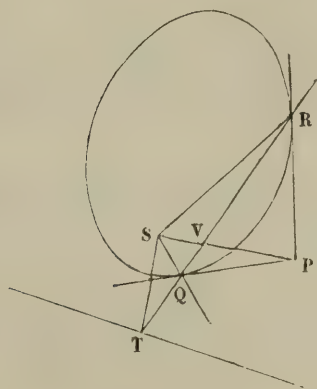
Ces relations curieuses se démontrent aisément à l'aide de deux théorèmes auxiliaires.

1. *Quand on mène d'un point  $P$  (fig. 1) deux tangentes  $PR, PQ$  à une section conique, on a*

$$\widehat{RSP} = \widehat{PSQ}.$$

Car, la directrice étant rencontrée par la droite  $RQ$ , en  $T$ , on déduit directement de la figure que la droite

Fig. 1.



$SP$  est la polaire du point  $T$ : donc le faisceau des quatre rayons  $S(TRVQ)$  est harmonique, et puisque, d'après la définition du foyer,  $TS$  est perpendiculaire à  $SP$  comme polaire de  $T$ , on a

$$\widehat{RSP} = \widehat{PSQ}.$$

2. *Quand deux sections coniques ont un foyer commun  $S$  (fig. 2) et deux tangentes communes  $\delta_1 \delta_2, \gamma_1 \gamma_2$ , on a*

$$\widehat{\delta_1 S \delta_2} = \widehat{\gamma_1 S \gamma_2}.$$





## SUR LA MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

M. Désiré André a fait connaître, en 1874, dans ce Journal (2<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 178), deux propriétés nouvelles des apothèmes et des rayons de la suite des polygones réguliers isopérimètres dont le nombre des côtés va sans cesse en doublant.

*Si l'on retranche chaque apothème du suivant, l'une quelconque des différences est inférieure au quart de la précédente.*

*Si l'on retranche chaque rayon du précédent, l'une quelconque des différences est inférieure au quart de la précédente.*

On peut tirer un parti utile de ces propositions qui semblaient n'offrir qu'un intérêt de pure curiosité; nous allons montrer, en effet, qu'elles permettent de simplifier, d'une manière à la fois notable et fort simple, la méthode des isopérimètres.

I. Désignons par  $\alpha$  et  $\rho$  l'apothème et le rayon du polygone régulier de  $n$  côtés dont le périmètre est égal à 2, et par  $\alpha_k$  et  $\rho_k$  l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre dont le nombre des côtés est égal à  $n.2^k$ .

Les rapports

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha}, \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_m - \alpha_{m-1}}{\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2}}$$

étant moindres que  $\frac{1}{4}$ , il en est de même du rapport obtenu

en divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, c'est-à-dire du rapport

$$\frac{\alpha_m - \alpha_1}{\alpha_{m-1} - \alpha},$$

et aussi de sa limite lorsque l'entier  $m$  croît indéfiniment. On a donc

$$\frac{\frac{1}{\pi} - \alpha_1}{\frac{1}{\pi} - \alpha} < \frac{1}{4},$$

d'où

$$\frac{1}{\pi} < \alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha).$$

Le même raisonnement, appliqué aux rapports

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1}, \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_2}, \dots, \frac{\rho_{m-1} - \rho_m}{\rho_{m-2} - \rho_{m-1}},$$

donne

$$\frac{1}{\pi} > \rho_1 - \frac{1}{3}(\rho - \rho_1).$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

*$\alpha$  et  $\rho$  étant l'apothème et le rayon d'un polygone régulier quelconque dont le périmètre est égal à 2, et  $\alpha_1$  et  $\rho_1$  étant l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, le nombre  $\frac{1}{\pi}$  est compris entre*

$$\rho_1 - \frac{1}{3}(\rho - \rho_1) \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha).$$

Remarquons que la différence entre ces deux limites

$$\frac{1}{3}(\rho - \alpha) - \frac{4}{3}(\rho_1 - \alpha_1)$$

équivaut à

$$\frac{2}{3} \frac{(\rho_1 - \alpha_1)^2}{\alpha_1}.$$

Il suffit, pour le voir, d'éliminer  $\rho$  et  $\alpha$  à l'aide des formules fondamentales

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \rho), \quad \rho_1 = \sqrt{\alpha_1 \rho}.$$

II. Cela posé, considérons la suite de Schwab

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, a_1, r_1, a_2, r_2.$$

Tandis que la méthode *ordinaire* des isopérimètres consiste à prendre  $a_k$  et  $r_k$  pour valeurs approchées de  $\frac{1}{\pi}$ , la méthode *perfectionnée* consiste à prendre

$$r_k - \frac{1}{3}(r_{k-1} - r_k), \quad a_k + \frac{1}{3}(a_k - a_{k-1}).$$

Comparons la marche de l'approximation dans les deux cas.

Pour obtenir  $\frac{1}{\pi}$  à moins de  $\frac{1}{10^m}$ , il suffit, dans la méthode ordinaire, que l'on ait

$$r_k - a_k < \frac{1}{10^m}.$$

Or, la différence  $r_k - a_k$  est moindre successivement que

$$\frac{1}{4}(r_{k-1} - a_{k-1}), \quad \frac{1}{4^2}(r_{k-2} - a_{k-2}), \quad \dots, \quad \frac{1}{4^{k-1}}(r_1 - a_1),$$

et, par conséquent, moindre que

$$\frac{1}{4^{k-1} \cdot 10},$$

puisque  $r_1 - a_1 = 0,0248\dots$  est inférieur à  $\frac{1}{40}$ . L'inégalité primitive sera donc vérifiée si l'on a

$$4^k > 10^{m-1},$$



d'où

$$k > \frac{m-1}{\log 4},$$

et, *a fortiori*,

$$k > \frac{5}{3}(m-1),$$

puisque  $\log 4 = 0,602\dots$  est supérieur à  $\frac{3}{5}$ .

Dans la méthode perfectionnée, pour obtenir  $\frac{1}{\pi}$  à moins de  $\frac{1}{10^m}$ , il suffit qu'on ait

$$\frac{2}{3} \frac{(r_k - a_k)^2}{a_k} > \frac{1}{10^m},$$

mais  $r_k - a_k$  est inférieur à  $\frac{1}{4^k \cdot 10}$ , et  $a_k$  reste supérieur à  $\frac{3}{10}$ , puisque  $a_1 = 0,301\dots$ ; l'inégalité précédente sera donc vérifiée si l'on a

$$\frac{9}{2} 4^{2k} > 10^{m-1},$$

et, *a fortiori*,

$$4^{2k+1} > 10^{m-1}.$$

On en déduit successivement

$$2k+1 > \frac{m-1}{\log 4} > \frac{5}{3}(m-1), \quad k > \frac{1}{6}(5m-8).$$

Comme l'entier égal ou immédiatement supérieur à  $\frac{5}{3}(m-1)$  est au moins égal au double de l'entier égal ou immédiatement supérieur à  $\frac{1}{6}(5m-8)$ , on voit que l'emploi de la méthode perfectionnée diminue certainement le travail de moitié.

III. On pourrait aller plus loin; des deux valeurs ap-

prochées

$$s_k = r_k - \frac{1}{3}(r_{k-1} - r_k), \quad b_k = a_k + \frac{1}{3}(a_k - a_{k-1})$$

on déduirait, par un tour analogue, deux nouvelles valeurs plus approchées, et ainsi de suite.

En considérant, par exemple, la valeur par excès  $b_k$  et tenant compte de la relation

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \frac{1}{4} \frac{a_k}{a_{k+1}},$$

on verrait que le rapport

$$\frac{b_k - b_{k+1}}{b_{k-1} - b_k}$$

est égal à

$$\frac{1}{4} \frac{a_k \cdot a_{k-1}}{a_{k+1}^2}$$

et, par suite, moindre que  $\frac{1}{4^2}$ , et il en résulterait, par le raisonnement fait en commençant,

$$\frac{1}{\pi} < b_k - \frac{1}{15}(b_{k-1} - b_k).$$

On voit de la sorte que l'on obtiendrait des valeurs alternativement approchées par défaut et par excès, soit à l'aide des seuls apothèmes, soit à l'aide des seuls rayons.

Nous nous bornerons à cette indication, d'abord parce qu'il s'agit d'une de ces extensions faciles que chacun peut développer, une fois le principe posé, et aussi parce qu'il convient, ce nous semble, de conserver à cette solution élémentaire la simplicité qui la distingue.

## CORRESPONDANCE.

Le théorème de Mécanique suivant et sa démonstration élémentaire sont bien connus.

*Si, aux milieux des côtés d'un polygone plan quelconque, on applique, dans le plan de ce polygone, des forces proportionnelles aux longueurs de ces côtés, perpendiculaires à leurs directions, et dirigées toutes du dedans au dehors, ou toutes du dehors au dedans, ces forces se feront équilibre.*

J'en déduis ce théorème de Géométrie, qui me semble curieux :

*Soit un polygone plan quelconque et un point O dans son plan. Les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés déterminent sur chacun des côtés deux segments  $(p, p_1)$ ,  $(p', p'_1)$ , ...*

*$a_1, a'_1, \dots$  étant les longueurs des côtés, on a l'égalité*

$$ap + a'p' + \dots = ap_1 + a'p'_1 + \dots$$

Il suffit pour le démontrer de prendre par rapport au point O la somme des moments des forces qui se font équilibre suivant le premier théorème.

G. BARRAN,

Étudiant à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans le *Zeitschrift* de Hoffmann, j'ai lu avec le plus vif intérêt les rapports contenant les questions dues aux *Nouvelles Annales*. Permettez-moi une petite Note concernant la question suivante :

*Dans le quadrilatère inscriptible et circonscriptible à*

un cercle, le produit des diagonales est égal à  $\frac{8r^2\rho^2}{r^2-d^2}$ , où  $r$  est le rayon du cercle circonscrit,  $\rho$  celui du cercle inscrit et  $d$  la distance des centres.

On peut mettre cette expression sous la forme

$$2\rho(\rho + \sqrt{\rho^2 + 4r^2}),$$

en substituant la valeur de  $d$ , car

$$d^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}.$$

C'est le théorème analogue à celui que Sturm a démontré pour le triangle, en 1824, dans les *Annales de Gergonne*. Si l'on veut avoir  $d$  dans la formule, on obtient par combinaison le produit des diagonales,  $2(r^2 + 2\rho^2 - d^2)$ .

P.-V. SIHAEWEN,

A Sarrebruck (Allemagne).

... Je suppose un point  $M$  lié invariablement à des axes  $Ox$ ,  $Oy$  rectangulaires, dont l'un,  $Ox$ , roule sur une courbe. Soit  $T$  le point de contact; je lui fais décrire un arc de courbe déterminé, et la droite  $TM$  décrit alors une surface. *Cette surface conserve une valeur constante quand le point  $M$  est situé en un point quelconque d'un cercle.* Telle est la proposition à faire voir.

Soit  $T'$  une position de  $T$  infiniment voisine,  $TT' = ds$ ; quand on passe de  $T$  en  $T'$ ,  $Ox$  tourne de l'angle de contingence  $d\alpha$ ,  $T$  est le centre de rotation,  $TM$  vient en  $TM'$  par une rotation  $d\alpha$ . La surface  $MM'TT'$  se compose de

$$TT'M' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} ds \cdot y$$

et

$$MM'T \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} [y^2 + (x-s)^2] d\alpha.$$

Elle a pour valeur

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) d\alpha + \frac{1}{2} y ds + xs d\alpha + \frac{1}{2} s^2 d\alpha.$$



La somme intégrale de ces aires est

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\rho + \frac{1}{2}y \cdot s + x \int_0^{\varphi} s dx + \int \frac{1}{2}s^2 dx,$$

$\varphi$  étant l'angle des deux tangentes extrêmes,  $s$  l'arc décrit par le point de contact T,  $\int s dx$  l'arc de développante décrite par le point du plan  $xOy$  coïncidant avec T à l'origine.

$\int \frac{1}{2} dx s^2$  l'aire de cette développante entre la tangente extrême et la courbe donnée.

Si la somme plus haut calculée est constante, on a

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\rho + \frac{1}{2}y \cdot s + x \int_0^{\varphi} s dx + \int \frac{1}{2}s^2 dx = \text{const.},$$

ce qui est l'équation d'un cercle, ainsi qu'il le fallait démontrer.

J.-B. POMEY.

## BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION A LA MÉTHODE DES QUATERNIONS, par C.-A. Laisant, député, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1881. In-8° de xxii-242 pages. Prix : 6<sup>fr</sup>.

Les premiers essais d'application de la méthode des quaternions en France remontent en 1862. Ils furent présentés par M. Allégret, dans une Thèse de doctorat. Prouhet, qui l'a signalée dans les *Nouvelles Annales* (2<sup>e</sup> série, t. II, 1863, p. 333), lui a consacré une courte analyse bibliographique, entremêlée d'appréciations peu encourageantes pour l'avenir des quaternions.

Douze ans après, en 1874, M. Houël publiait, dans la *Théorie élémentaire des quantités complexes*, commencée en 1867, une exposition élémentaire du *Calcul des Quaternions*. Cet Ouvrage a été le premier, édité en France, qui ait cherché

à vulgariser l'étude des quaternions en la rendant accessible à tous les géomètres de notre pays. Néanmoins, en dehors de ces deux tentatives, la méthode des quaternions n'a pas trouvé en France de nombreux partisans; elle a surtout été en faveur chez les géomètres étrangers, parmi lesquels nous devons signaler, en Angleterre, W.-R. Hamilton, leur inventeur; en Italie, G. Bellavitis; en Allemagne, Unverzagt.

Depuis la publication de ce nouvel algorithme, il y a aujourd'hui près de trente ans, très peu de géomètres français en ont propagé l'emploi; mais nous croyons savoir que la méthode des quaternions commence à pénétrer dans le public mathématique français, et nous n'hésitons pas à en attribuer l'initiative aux efforts soutenus de M. Laisant pour la vulgarisation de la méthode des équipollences, qui, on peut le dire, a préparé l'avènement de la méthode des quaternions. C'est précisément dans ce Journal que M. Laisant a signalé les applications de la Géométrie analytique plane due à M. G. Bellavitis (*Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XII et XIII, 1873-1874). Il eût été désirable que ce même recueil renfermât aussi la généralisation des équipollences, ou leur extension à la Géométrie de l'espace; mais l'auteur a préféré publier directement l'Ouvrage.

Comme il le déclare lui-même, il a cru devoir adopter presque exclusivement les notations introduites par M. Houël; mais la rédaction de son Ouvrage est indépendante de tout autre traité, et peut-être contribuera-t-elle à lui attribuer de nombreuses adhésions. Il n'a pas voulu non plus suivre l'Ouvrage d'Hamilton et en publier une sorte de traduction. Ce travail vient justement d'être entrepris par M. Plarr, pour l'Ouvrage classique de M. Tait, qui a vulgarisé depuis longtemps les quaternions en Angleterre.

Le Livre de M. Laisant se divise en onze Chapitres.

Le premier Chapitre est consacré à la définition des *vecteurs* et à leurs combinaisons les plus simples, par addition et par soustraction. Ces vecteurs sont les expressions de translations rectilignes, et toutes les règles de l'Algèbre ordinaire s'appliquent rigoureusement aux additions et soustractions de vecteurs ayant une direction unique, et aux multiplications de ces vecteurs par des nombres algébriques réels. Comme applications, signalons la démonstration des propriétés des diagonales d'un quadrilatère, des hauteurs et des médianes d'un triangle, etc.

Le Chapitre II traite des opérations analogues effectuées sur

les *biradiales*, ou rapports géométriques de deux vecteurs.

Les règles du calcul algébrique ne s'appliquent plus à ces opérations. C'est ainsi que la multiplication est simplement associative, et cesse d'être commutative.

La représentation analytique des biradiales définit une expression de quatre termes dont l'ensemble a reçu pour ce fait la dénomination de *quaternion*. On reconnaît que ce symbole est égal au produit de son module par son quaternion unitaire ou *verseur*.

La propriété associative de la multiplication est essentielle dans la théorie des quaternions. C'est ainsi que  $AB$  n'est pas égal à  $BA$ , que  $A^2B^2$  est très différent de  $(AB)^2$ .

L'algèbre des quaternions présente donc certaines difficultés spéciales, et, ajoute l'auteur, « on peut en profiter pour faire la critique de la méthode des quaternions, et déclarer qu'il y a là un inconvénient fondamental et grave.

» Mais cet inconvénient résulte de la nature même des choses. Il représente la traduction exacte, formelle, d'un fait précis.

» Je crois, pour mon compte, qu'il faut chercher dans ce procédé d'exposition trop exclusivement analytique l'une des causes principales de la défaveur dans laquelle les quaternions sont restés si longtemps en France, défaveur dont ils commencent à peine à se relever, alors qu'à l'étranger, en Angleterre et en Amérique surtout, on en fait tant d'usage dans toutes les branches des Mathématiques appliquées.

» On ne s'étonnera donc pas que nous ayons tenu à appuyer constamment le début de notre exposition sur des considérations géométriques, avec une insistance qui pourrait sembler excessive et presque puérile sans les considérations qui précèdent. »

Une fois arrivé à la définition et à la notation des quaternions, l'auteur croit devoir plus fréquemment livrer le lecteur à lui-même, pour parcourir successivement les sujets traités dans le reste de l'Ouvrage.

On y étudie la ligne droite et le plan, le cercle et la sphère, puis on définit dans le Chapitre IV la différentiation des quaternions pour l'intelligence des propriétés des tangentes aux coniques étudiées dans les Chapitres VI, VII et VIII.

Le Chapitre IX est consacré à l'étude de plusieurs formules relatives au produit de trois, quatre et plusieurs vecteurs, et à la rotation des vecteurs.



Le Chapitre X traite de la résolution des équations du premier degré, c'est-à-dire des équations qui contiennent un quaternion inconnu à la première puissance avec des quaternions connus. Ces notions peuvent avoir leur utilité pour l'étude des surfaces du second ordre, qui forme le sujet du Chapitre XI qui termine l'Ouvrage.

Chacun des Chapitres renferme des applications à divers problèmes et est suivi de douze à quinze énoncés d'exercices proposés. Plusieurs d'entre eux, relatifs aux propriétés des tétraèdres, ont été communiqués à l'auteur par M. Genty, à qui nous devons déjà plusieurs contributions à l'étude des quaternions, en Géométrie et en Mécanique.

L'examen de ces énoncés y fait reconnaître plusieurs propriétés nouvelles et dignes d'attention.

Toutes les dispositions adoptées par l'auteur font reconnaître en lui la préoccupation de faciliter la lecture de son Ouvrage et l'initiation aux nouvelles méthodes qu'il a pour but d'introduire dans notre pays. Cette préoccupation apparaît d'une manière frappante, et l'auteur lui-même croit devoir en avertir : « Je me suis, dit-il, constamment efforcé de rendre l'enchaînement des idées aussi clair que possible, à tel point qu'on pourrait peut-être me reprocher une minutie excessive et une trop grande insistance sur des choses presque évidentes ; mais on ne saurait trop s'attacher à aplanir les difficultés lorsqu'il s'agit d'une étude nouvelle. »

Il est à souhaiter que, grâce à cette précieuse qualité de ce Livre, la méthode des quaternions finisse par triompher des préjugés qui ont, en France, retardé son développement.

H. BROCARD.

### QUESTIONS.

1404. On peut toujours trouver deux entiers  $t$  et  $u$ , tels que

$$At^3 + Bu^2 + C$$

soit divisible par 7,  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant trois entiers positifs ou négatifs non divisibles par 7. (PELLET.)



1405. Si les racines d'une équation, de degré pair  $2m$ , peuvent se partager en  $m$  groupes de deux racines  $x_1, x_2$  satisfaisant à la relation

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

on peut, par une substitution linéaire  $x = \frac{\alpha y + \beta}{\sqrt{\gamma + \delta}}$ , amener l'équation à n'avoir que des termes de degré pair en  $y$ . (PELLET.)

1406. Zéro, un, six sont-ils les seuls nombres triangulaires dont les carrés soient triangulaires?

(LIONNET.)

1407. Le nombre des groupes de cinq impairs consécutifs, dont quatre sont des nombres premiers, est-il illimité?

(LIONNET.)

1408. Trouver les nombres pairs et positifs ayant chacun cette curieuse propriété d'être d'autant de manières la somme de deux impairs premiers que celle de deux impairs composés.

(LIONNET.)

1409. Quelle valeur faut-il donner à l'angle A au sommet d'un triangle isoscèle ABC pour que le quadrilatère, ayant pour sommets les pieds A', B', C' des trois hauteurs du triangle et le milieu de la droite qui joint leur point de concours au sommet A, soit un parallélogramme?

(LIONNET.)

1410. Etant donné un contour polygonal inscrit dans une parabole, et tel que les projections de ses côtés sur la directrice soient égales, on mène par chacun de ses sommets une parallèle P à l'axe de la parabole, puis on prolonge tous les côtés du contour dans le même sens jusqu'à la première P qu'ils rencontrent. Les segments ainsi déterminés sur les lignes P sont égaux.

(D'OCAGNE.)

# DÉVELOPPEMENTS SUR LA QUESTION RELATIVE A L'INFLUENCE DE LA ROTATION DE LA TERRE SUR LE MOUVEMENT DU PENDULE ;

PAR M. H. RESAL.

Extrait d'une leçon de l'École Polytechnique.

Dans cette étude j'ai cherché à pousser plus loin l'approximation qu'on ne le fait d'habitude et à tenir compte de la composante de la rotation de la Terre, estimée suivant le rayon parallèle à la méridienne.

Soient

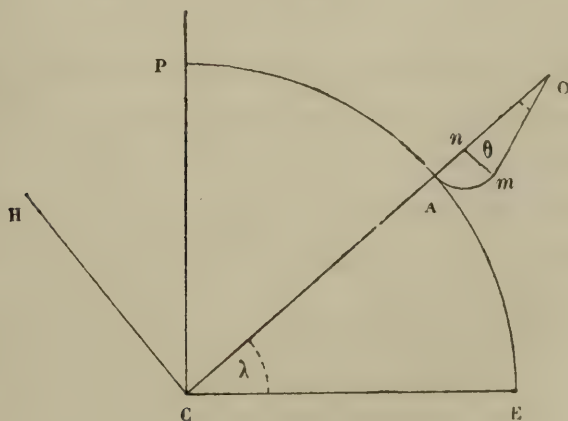
C le centre de la Terre ;

CP la portion boréale de son axe de rotation ;

T la durée d'une révolution diurne ;

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}$  la vitesse angulaire de la Terre, dont

Fig. 1.



nous négligerons les puissances des ordres supérieurs au premier ; nous rappellerons qu'elle a lieu de la

- droite vers la gauche pour l'observateur placé suivant PC en ayant les pieds en C;
- O le point de suspension du pendule dont la longueur sera représentée par  $l$ ;
- OA la position verticale du pendule;
- P, E les intersections de la circonférence méridienne, passant par A, avec l'axe de la Terre et la trace du méridien sur l'équateur;
- $\lambda = \widehat{OCE}$  la latitude du lieu;
- Om le pendule dans une position quelconque;
- $\theta$  l'angle qu'il forme avec la verticale et qui est censé assez petit pour qu'on puisse en négliger les puissances supérieures à la seconde;
- $n$  la projection de  $m$  sur OC;
- $\theta_0$  l'écart initial qu'on fait subir au pendule avant de l'abandonner ensuite à lui-même;
- CH la perpendiculaire en C à CO dans le plan méridien.

Nous avons

$$(1) \quad On = l \cos \theta = l \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right).$$

La rotation  $\omega$  se décompose en deux autres, dont nous étudierons séparément les effets; l'une,  $\omega \sin \lambda$ , autour de OC, et l'autre,  $\omega \cos \lambda$ , autour de CH.

1° *Composante de la rotation  $\omega \sin \lambda$  autour de la verticale.* — Prenons pour plan de projection le plan horizontal du point A.

Soient (*fig. 2*) Ax la trace du plan vertical passant par OA et le point de départ  $m_0$ ; Ay la position que prend cette droite quand on lui fait subir autour de A, de la gauche vers la droite, un déplacement angulaire de  $90^\circ$ .

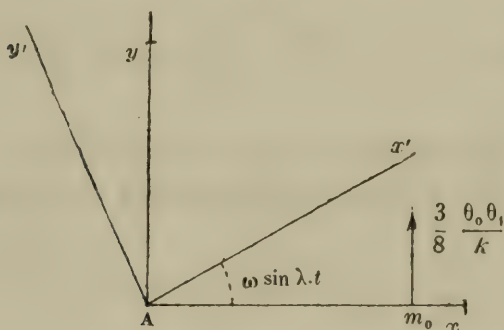
Le point  $m$ , partant de la position  $m_0$  sans vitesse

initiale apparente, est animé, dans l'espace absolu, de la vitesse initiale

$$(2) \quad \omega \sin \lambda . m_0 n_0 = \omega l \sin \lambda . \theta_0 ,$$

parallèle à  $Ay$ ; de sorte que, en projection horizontale et dans cet espace,  $m$  décrira une ellipse tournant de la

Fig. 2.



gauche vers la droite. Or on sait que, pour déterminer les éléments de cette ellipse, on peut faire abstraction de son mouvement de rotation; posant  $k^2 = \frac{g}{l}$  et désignant par  $\theta_1$  la valeur de  $\theta$  correspondant à l'azimut  $Ay$ , nous aurons pour les coordonnées du point  $m$  au bout du temps  $t$ ,

$$(3) \quad x = l\theta_0 \cos kt, \quad y = l\theta_1 \sin kt,$$

et, en vertu de la valeur (2),

$$\frac{dy}{dt} = \omega l \sin \lambda \theta_0 \quad \text{pour } t = 0,$$

d'où

$$(4) \quad \theta_1 = \frac{\omega \sin \lambda . \theta_0}{k}.$$



La vitesse angulaire de l'ellipse sera donc

$$\frac{3}{8} \theta_0 \theta_1 k = \frac{3}{8} \omega \sin \lambda \theta_0^2.$$

Soient  $Ax'$ ,  $Ay'$  deux axes mobiles coïncidant primitivement avec  $Ax$ ,  $Ay$ , et animés de la rotation  $\omega \sin \lambda$  de la droite vers la gauche. La rotation apparente de l'ellipse de la gauche vers la droite pour l'observateur entraîné dans le mouvement de  $y'Ax'$  sera

$$(5) \quad \omega \sin \lambda - \frac{3 \omega \sin \lambda \theta_0^2}{8} = \frac{2\pi}{T} \sin \lambda \left( 1 - \frac{3}{8} \theta_0^2 \right);$$

si  $\tau$  est la durée d'une révolution de l'ellipse, en admettant qu'elle puisse physiquement s'effectuer, nous aurons

$$\frac{2\pi}{T} \sin \lambda \left( 1 - \frac{3}{8} \theta_0^2 \right) \tau = 2\pi,$$

d'où

$$\tau = \frac{T}{\sin \lambda} \left( 1 + \frac{3}{8} \theta_0^2 \right),$$

et, en exprimant  $\tau$  et  $T$  en heures,

$$\tau = \frac{24^h}{\sin \lambda} \left( 1 + \frac{3}{8} \theta_0^2 \right).$$

A Paris on a

$$\lambda = 48^\circ 51', \quad \sin \lambda = 0,753,$$

et, par suite,

$$\tau = 32^h \left( 1 + \frac{3}{8} \theta_0^2 \right).$$

Dans l'expérience exécutée par Foucault, au Panthéon, en 1851, on avait

$$l = 67^m, \quad 2\pi l \sin \theta_0 = 18^m,$$

et le terme en  $\theta_0^2$  de l'expression précédente, ne s'élevant qu'à 0,0076, n'aurait pu être apprécié.

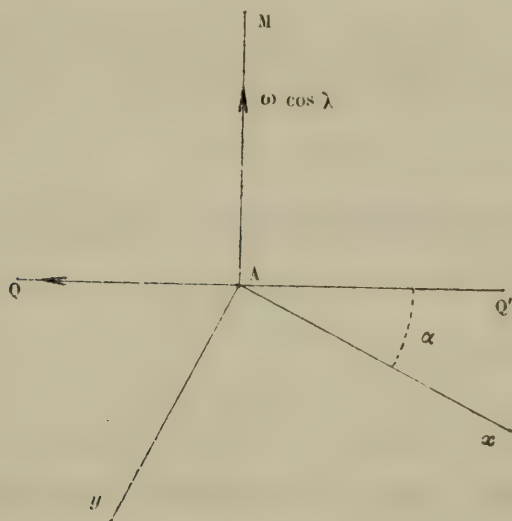
2° Composante  $\omega \cos \lambda$  de la rotation autour d'un diamètre parallèle à la méridienne. — La vitesse de  $m$  (fig. 1) se compose de la vitesse

$$(6) \quad -\frac{dO.x}{dt} = l\theta \frac{d\theta}{dt}$$

suivant AO et d'une vitesse horizontale qui, relativement à  $\omega \cos \lambda$ , ne donnera pas d'accélération centrifuge composée.

Soient (fig. 3), dans le plan horizontal, AM la portion de la méridienne dirigée vers le pôle Nord; AQ

Fig. 3.



celle de la tangente au parallèle opposée à la direction du mouvement de la Terre.

La vitesse (6) donne, suivant AQ, l'accélération centrifuge composée

$$2\omega \cos \lambda \theta \frac{d\theta}{dt} = \omega \cos \lambda \frac{d\theta^2}{dt}.$$

Soient encore Ax la position du grand axe de l'el-

lipse au bout du temps  $t$ ;  $\alpha$  l'angle qu'elle forme avec le prolongement  $AQ'$  de  $AQ$ .

Les équations du mouvement seraient, en supposant  $\omega = 0$ ,

$$\frac{d^3 x}{dt^2} = -k^2 x, \quad \frac{d^3 y}{dt^2} = -k^2 y.$$

En y introduisant l'accélération centrifuge composée ci-dessus, elles deviennent

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x - \omega l \cos \lambda \cos \alpha \frac{d\theta^2}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y + \omega l \cos \lambda \sin \alpha \frac{d\theta^2}{dt}. \end{cases}$$

Mais dans ces formules on peut substituer à  $\theta^2$  sa valeur résultant de l'hypothèse  $\omega = 0$ ; or

$$l^2 \theta^2 = x^2 + y^2,$$

d'où, d'après les formules (3) et remarquant que  $\theta_1^2$  est de l'ordre  $\omega^2 \theta_0^2$ ,

$$\theta^2 = \theta_0^2 \cos^2 kt.$$

On déduit de là

$$(a) \quad \frac{d\theta^2}{dt} = -\theta_0^2 k \sin 2kt.$$

D'autre part, comme l'expression (5) n'est autre chose que la valeur de  $\frac{dx}{dt}$ , il vient, en désignant par  $\alpha_0$  la valeur initiale de  $\alpha$ ,

$$(b) \quad \alpha = \alpha_0 + \omega \sin \lambda . t.$$

En substituant les valeurs (a) et (b) dans les équations (7), et posant

$$(8) \quad \Lambda = \theta_0^2 \frac{\omega \cos \lambda}{2k}, \quad m = 3k + \omega \sin \lambda, \quad n = 2k - \omega \sin \lambda.$$

il vient

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + A l [\sin(mt + \alpha_0) + \sin(nt + \alpha_0)], \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y + A l [\cos(mt + \alpha_0) - \cos(nt + \alpha_0)], \end{cases}$$

équation dont on trouvera facilement les intégrales en remarquant que l'on a

$$x = l\theta_0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -l\theta_0\omega \sin \lambda$$

pour  $t = 0$ . Mais, comme les termes en  $A$  introduits dans  $x$  et  $y$  sont périodiques, que, à peu de chose près, ils s'annulent deux fois dans chaque demi-oscillation pendulaire, ils ne pourront pas être observés. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de la rotation  $\omega \cos \lambda$ .

## SUR QUELQUES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. S. RÉALIS,

Ingénieur à Turin.

1. A l'aide de substitutions convenables, la formule élémentaire

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \text{arc tang } y + \text{const.}$$

conduit à des résultats assez curieux, propres à être développés, dans l'enseignement du Calcul intégral, avant d'aborder la théorie des fonctions elliptiques. Nous allons en signaler ici quelques-uns, pour lesquels la transformation consiste simplement à remplacer la variable  $y$  par un radical du second degré, sous lequel se trouve une fonction entière d'une nouvelle variable.



Pour plus de simplicité, nous supprimerons partout la constante arbitraire introduite par l'intégration. De plus, dans le second membre de nos formules, nous désignerons souvent par  $z$  le radical qui figure au premier membre. Ainsi, en écrivant, par exemple,

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 2)} \frac{dx}{\sqrt{3 - x^4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{xz}{\sqrt{2}},$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{xz}{\sqrt{2}},$$

nous sous-entendons que  $z$  représente le radical  $\sqrt{3 - x^4}$  dans la première égalité, et le radical  $\sqrt{x^4 - 3}$  dans la seconde.

2. On a

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 - x - 2}} = 2 \arctan z,$$

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x^2 - x}} = 2 \arctan z,$$

$$\int \frac{5x \mp 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \mp 1)^2 (x \pm 1)^3 - 1}} = 2 \arctan z,$$

$$\int \frac{7x \mp 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \mp 1)^3 (x \pm 1)^4 - 1}} = 2 \arctan z,$$

.....

La formule générale à laquelle se rapportent ces résultats est la suivante :

$$\int \frac{(2n + 1)x \mp 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \pm 1)(x^2 - 1)^n - 1}} = 2 \arctan \sqrt{(x \pm 1)(x^2 - 1)^n - 1},$$

où les signes supérieurs et inférieurs se correspondent. On la vérifie directement par la différentiation.

Les valeurs des intégrales

$$\begin{aligned} & \int \frac{4x \mp 2}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 \pm 2x^3 \mp 2x - 2}}, \\ & \int \frac{5x \mp 3}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \mp 1)(x \pm 1)^4 - 1}}, \\ & \int \frac{6x \mp 4}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x \mp 1)(x \pm 1)^5 - 1}}, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

se déterminent comme les précédentes. Elles se déduisent, en effet, de la formule générale

$$\begin{aligned} & \int \frac{(n+2)x \mp n}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}(x \pm 1)^n - 1}} \\ & = \arctang \sqrt{(x^2 - 1)(x \pm 1)^n - 1}. \end{aligned}$$

Parmi les intégrations qui rentrent immédiatement dans la formule fondamentale d'où nous sommes partis, nous inscrirons encore la formule

$$\int \frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \alpha x + \beta)^n - 1}} = \frac{2}{n} \arctang z,$$

dont la généralisation se présente d'elle-même.

Prenant  $n = 2$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ , on trouve le résultat très remarquable

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}} = \arctang z.$$

3. Des résultats qui viennent d'être signalés, on passe directement aux suivants :

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x^2 + 1}{x^4 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} = \arctang xz, \\ & \int \frac{5x^2 - 1}{x^4 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^8 + x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1}} = \arctang xz, \\ & \int \frac{5x^2 + 3}{x^4 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^8 - 3x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 3}} = \arctang xz, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a aussi

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 3x^2 + 3}} = \frac{1}{2} \arctang xz,$$

$$\int \frac{nx + (n-1)\alpha}{x(x+\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{x^n + \alpha x^{n-1} - 1}} = 2 \arctang z,$$

$$\int \frac{2x^2 + \alpha}{x^4 + \alpha x^2 \pm 1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \alpha)(x^4 + \alpha x^2 \pm 2)}} = \frac{1}{2} \arctang xz,$$

$n$  étant un entier positif et  $\alpha$  une constante quelconque. Il est bon de remarquer que cette dernière formule, où les signes se correspondent dans les deux membres, fait connaître les valeurs des intégrales

$$\int \frac{2x^2 \pm 3}{x^4 \pm 3x^2 + 1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm 1)(x^2 \pm 2)(x^2 \pm 3)}},$$

$$\int \frac{2x^2 \pm 1}{x^4 \pm x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm 2)(x^4 - 1)}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm 1)\sqrt{(x^2 \pm 2)(x^4 \pm 2x^2 + 2)}}.$$

#### 4. La formule élémentaire

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \frac{y-1}{y+1}$$

conduit de même, par des substitutions semblables aux précédentes, à la détermination d'intégrales analogues à celles dont on vient de s'occuper.

Par exemple,

$$\int \frac{3x+1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^2-x+2}} = \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2(x+1)^3+1}} = \log \frac{z-1}{z+1},$$

$$\int \frac{7x+1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3(x-1)^4+1}} = \log \frac{z-1}{z+1},$$

.....

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4-3x^2+3}} = \frac{1}{6} \log \frac{xz-1}{xz+1},$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{(2-x^2)(2-2x^2+x^4)}} = \frac{1}{4} \log \frac{xz+1}{(1-x^2)^2},$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^4-1} \frac{dx}{\sqrt{x^6-2x^4+2}} = \frac{1}{4} \log \frac{xz-1}{xz+1},$$

.....,

$$\int \frac{3x^2-1}{x^4-1} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2-1}} = \frac{1}{2} \log \frac{xz-1}{xz+1},$$

$$\int \frac{4x^2-2}{x^4-1} \frac{dx}{\sqrt{x^6+2x^4-2}} = \frac{1}{2} \log \frac{xz-1}{xz+1}$$

$$\int \frac{5x^2-3}{x^4-1} \frac{dx}{\sqrt{x^4+3x^6+2x^4-2x^2-3}} = \frac{1}{2} \log \frac{xz-1}{xz+1},$$

.....,

$z$  désignant toujours, dans le second membre de chaque formule, le radical qui entre dans le premier membre.

5. On voit assez de quelle manière les résultats qui précèdent pourraient être généralisés à différents points de vue, et comment, par l'emploi combiné des formules fondamentales du Calcul intégral, on peut amener directement une foule d'intégrales indéfinies, analogues aux précédentes, et s'exprimant de même sans l'intervention des fonctions elliptiques. Ajoutons cependant que les résultats à obtenir dans cette voie, étant généralement de simples objets de curiosité, ne sauraient présenter quelque intérêt qu'à la condition de se rapporter à des différentielles très simples.

Citons, en cette matière, l'intégration de la différentielle

$$\frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$



effectuée par Euler, et qui a donné lieu récemment à d'intéressantes remarques de la part de M. Hermite et de M. Catalan <sup>(1)</sup>. Nous renvoyons du reste au *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. Frenet (Paris, 1882), où se trouvent réunis (n<sup>os</sup> 401 à 408) plusieurs résultats remarquables, obtenus par Euler et par d'autres, touchant les expressions que l'on intègre en les rendant rationnelles.

Il est à propos de rappeler aussi les intégrales

$$\int \frac{1 \mp x^2}{1 \pm x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma}},$$

$$\int \frac{\alpha x^4 - \gamma}{\alpha x^4 + \delta x^2 + \gamma} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma}}.$$

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}},$$

et quelques autres du même genre, que Legendre a ramenées aux intégrales élémentaires dans ses différents Ouvrages sur le Calcul intégral et les fonctions elliptiques <sup>(2)</sup>.

## 6. L'intégrale

$$\int \frac{\beta - x}{\beta + x} \frac{dx}{\sqrt{x(x + \alpha)(x + \gamma)}}$$

s'exprime pareillement sans transcendante elliptique, lorsque  $\beta^2 = \alpha\gamma$ , ainsi que cela est établi dans le *Recueil*

<sup>(1)</sup> *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*: année 1879, 1<sup>re</sup> Partie, p. 226; *Journal de Mathématiques*, année 1880, p. 5; *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 151.

<sup>(2)</sup> Voir aussi, pour la dernière intégrale, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1<sup>re</sup> série, t. X, p. 362.

*complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. Tisserand (Paris, 1876, p. 127).

Il en est de même à l'égard de l'intégrale

$$X = \int \frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4}},$$

où l'exposant  $n$  est un nombre entier, et les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont des constante quelconques.

Cette intégrale n'avait pas encore été considérée dans sa généralité. Les cas spéciaux dont Euler et Legendre s'étaient occupés viennent d'être mentionnés. Le cas de  $n = 1$ , que nous avons proposé comme *question* dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 63), a été traité par M. V. Jamet (p. 188 du même Tome); ce cas comprend l'intégration rapportée dans le *Recueil complémentaire* précité.

Mais il est facile de voir que, quel que soit  $n$ , si l'on pose

$$x = \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}},$$

l'expression  $X$  se réduit toujours à la forme

$$\int \frac{Y dy}{\sqrt{A + By + Cy^2}},$$

$Y$  étant une fonction rationnelle de  $y$ . Cette expression ne représente donc pas une intégrale elliptique.

On trouve, en effet, en faisant, pour abréger,

$$P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4,$$

$$Q = \left( \alpha - \beta + \frac{\gamma}{2} \right) + (6\alpha - \gamma)y + \left( \alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} \right)y^2,$$

les relations

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1+y}{y} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{1+x^3}{1-x^3} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3+y}{1+3y} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{1+6y+y^2}{y(1+y)} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \int \frac{1-x}{1+x} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{y\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \sqrt{2} \int \frac{dy}{(1+y)\sqrt{Q}}; \\
 \int \frac{1-x^3}{1+x^3} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1+3y}{y(3+y)} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{1-x^4}{1+x^4} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= 2\sqrt{2} \int \frac{1+y}{1+6y+y^2} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{y-1}{y} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{x^2}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int \frac{(y-1)^2}{y(y+1)} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{x^3}{1-x^6} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(y-1)^3}{y(y+3)(3y+1)} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 \int \frac{x^4}{1-x^8} \frac{dx}{\sqrt{P}} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \int \frac{(y-1)^4}{y(y+1)(y^2+6y+1)} \frac{dy}{\sqrt{Q}}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Prenant en particulier

$$P = 1 + x^4, \quad \text{d'où} \quad Q = 1 + 6y + y^2.$$

on reproduit, en leur donnant une grande extension, les intégrales d'Euler (n<sup>os</sup> 402, 403, 404 du *Recueil* de M. Frenet), auxquelles le grand Analyste était arrivé par une voie différente.

Nous inscrirons encore les formules

$$\begin{aligned} & \int \frac{x+2}{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-2x^2+3x-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2-3}} \arccos \frac{x\sqrt{2-3}}{(x-1)\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-3}} \log \frac{\sqrt{x^3-2x^2+3x-1}-x\sqrt{2-3}}{\sqrt{x^3-2x^2+3x-1}+x\sqrt{2-3}}, \\ & \int \frac{x-2}{x+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+2x^2+3x+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2-3}} \arccos \frac{x\sqrt{2-3}}{(x+1)\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-3}} \log \frac{\sqrt{x^3+2x^2+3x+1}-x\sqrt{2-3}}{\sqrt{x^3+2x^2+3x+1}+x\sqrt{2-3}}, \end{aligned}$$

susceptibles d'une grande et belle généralisation, et dans lesquelles le cas particulier de  $\alpha = 3$  constitue une exception digne d'attention.

7. Qu'il nous soit permis, en terminant, de rappeler ici la question 325, proposée de même dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 32), et dont il n'a pas encore été publié de solution.

## COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882. SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

*On donne deux cercles se coupant aux points a et b.  
Une conique quelconque, passant par ces points et*



*tangente aux deux cercles, rencontre l'hyperbole équilatère, qui a ces points pour sommets, en deux autres points c et d :*

1° *Démontrer que la droite cd passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés ;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par a et b, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle E et F ;*

3° *Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences E ou F ; démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.*

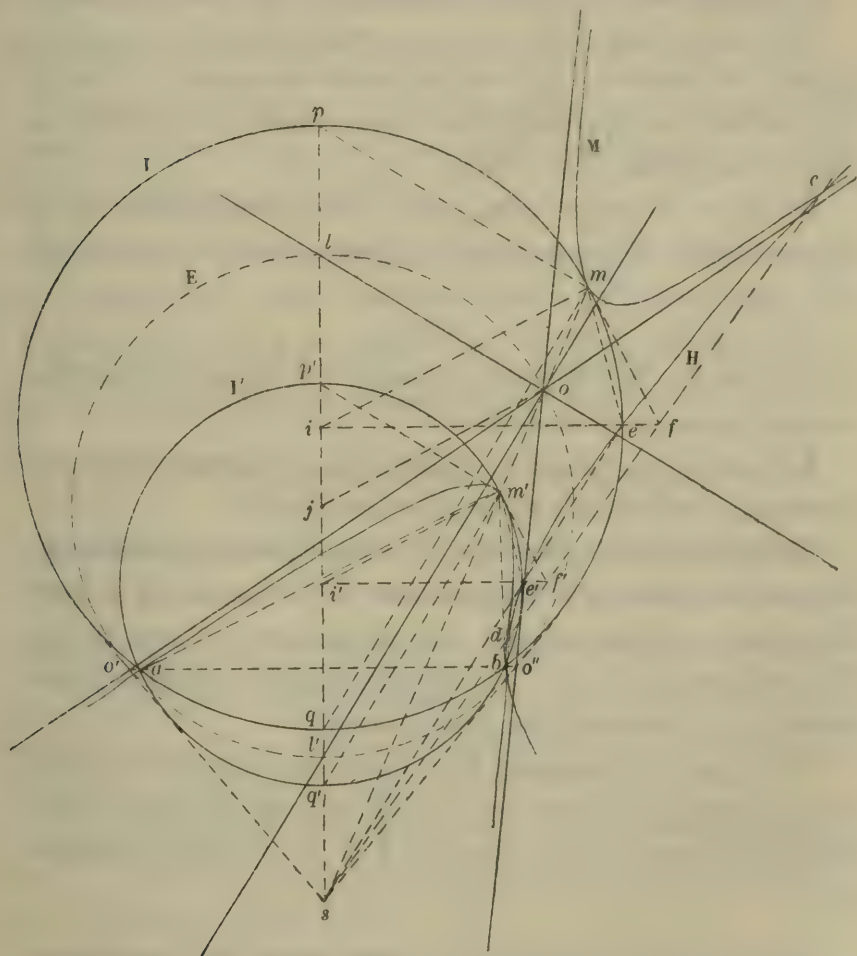
Soient I et I' les circonférences données qui se coupent aux points a et b ; s le centre de similitude externe de ces circonférences et s' l'autre centre de similitude. Prenons une conique M passant par a et b et tangente à I et I'. Soient m, m' les points où elle touche ces circonférences. On sait que la tangente en m à la circonférence I et la corde ab sont également inclinées sur les axes de M. Comme ceci est vrai pour la tangente en m' à I', il en résulte que les tangentes en m et m' aux circonférences données sont parallèles entre elles. La droite mm' passe alors par le centre de similitude s.

Les circonférences I et I' ayant deux centres de similitude, il y a deux séries de coniques satisfaisant à la question, c'est-à-dire passant par les points a et b et tangentes aux circonférences données. Nous désignerons par M<sub>s</sub> les coniques pour lesquelles les cordes de contact, telles que mm', passent par s ; et par M<sub>s'</sub> les autres coniques (1).

---

(1) On voit facilement que les coniques M<sub>s</sub> sont des hyperboles et que les coniques M<sub>s'</sub> sont des ellipses.

L'hyperbole équilatère  $H$ , dont les sommets sont  $a$  et  $b$ , coupe  $I$  aux extrémités du diamètre de cette circonférence parallèle à  $ab$ <sup>(1)</sup>. De même pour  $I'$ . Appelons  $e$  et  $e'$  les points où l'une des branches de  $H$  rencontre  $I$  et



$I'$ . Il résulte de la propriété que nous venons de rappeler que la droite  $ee'$  passe par  $s$ .

Ceci va nous permettre de démontrer simplement la première partie de la question proposée.

(<sup>1</sup>) Nous supposons démontrée cette propriété.

Les trois coniques I, M, H ayant une corde commune  $ab$  se coupent deux à deux suivant des cordes qui passent par un même point; I et H ont pour corde commune, en dehors de  $ab$ , la parallèle  $ef$  à  $ab$ . De même I et M ont pour corde commune la tangente  $mf$  à ces courbes.

Le point  $f$ , où cette tangente rencontre  $ef$ , appartient alors à la droite  $cd$  qui est la corde commune à H et M. De même, en prenant les trois courbes I', M, H, on trouve un point  $f'$  de  $cd$ .

Mais les triangles  $mef$ ,  $m'e'f'$  sont semblables et les droites  $mm'$ ,  $ee'$  passent par  $s$ . Il en est alors de même de  $ff'$ . La droite  $ff'$ , c'est-à-dire  $cd$ , passe donc par  $s$ .

2° Appelons  $o$  le milieu de  $mm'$ ; ce point est le centre de la conique M. Menons du point  $o$  la droite  $oj$  parallèlement au rayon  $im$  de I.

Le point  $j$  est alors le milieu du segment  $ii'$  compris entre les centres des circonférences I et I'.

Le point  $j$  est, par suite, le même pour toutes les coniques satisfaisant à la question. Le segment  $oj$  a pour longueur la demi-somme des longueurs des rayons des circonférences I et I'. Les points tels que  $o$  appartiennent donc à une circonférence de cercle E.

S'il s'agit de coniques  $M_s$ , leurs centres sont sur une circonférence F concentrique à E et dont le rayon est la demi-différence des rayons de I et de I'. On peut donc dire :

*Toutes les coniques qui, passant par  $a$  et  $b$ , sont tangentes aux deux circonférences I et I', ont leurs centres sur deux circonférences concentriques E et F. Les rayons de ces dernières circonférences sont égaux, l'un à la demi-somme, l'autre à la demi-différence des rayons des circonférences I, I'.*

3° Les axes de la conique M sont parallèles aux bissec-



trices des angles que font entre elles les cordes  $m'a$ ,  $m'b$ . Ces axes sont alors parallèles aux droites  $m'p'$ ,  $m'q'$  qui joignent le point  $m'$  aux extrémités du diamètre  $p'q'$  perpendiculaire à  $ab$ .

Ces axes sont aussi parallèles aux droites analogues  $mp$ ,  $mq$ , et, comme ils passent par  $o$ , on voit que :

*Les axes de M sont les droites  $ol$ ,  $ol'$  qui joignent le centre  $o$  aux points  $l$  et  $l'$  qui sont respectivement les milieux des segments  $pp'$ ,  $qq'$ .*

Si l'on prend des coniques  $M_s$ , les points  $l$  et  $l'$  sont fixes. Donc :

*Toutes les coniques  $M_s$  ont pour axes des droites passant par les mêmes deux points  $l$  et  $l'$ .*

L'angle  $lol'$  étant droit, nous retrouvons que :

*Le lieu des centres des coniques  $M_s$  est une circonférence  $E$  décrite sur  $ll'$  comme diamètre.*

Parmi les positions que peut occuper le centre  $o$ , il y en a  $o'$ ,  $o''$  qui sont respectivement les milieux des segments compris sur les tangentes communes à  $I$  et  $I'$  entre les points de contact de ces droites.

La circonférence  $E$  coupe donc la droite  $ab$  aux points  $o'$  et  $o''$ . On voit aussi qu'elle est tangente en ces points aux tangentes communes à  $I$  et  $I'$ .

Cherchons les asymptotes de  $M$ . Ces droites forment avec la corde commune  $ab$  un triangle qu'il s'agit de construire. Dans ce triangle, nous connaissons la médiane qui part du point  $o$ , puisqu'elle aboutit au point  $g$  milieu de  $ab$ ; nous connaissons aussi la bissectrice de l'angle en  $o$ , qui est l'axe  $ol'$ , puisque les asymptotes de  $M$  sont également inclinées sur cet axe.

Cette médiane et cette bissectrice étant connues, on a



tout de suite la circonférence circonscrite au triangle. Cette circonférence n'est autre que E. Les asymptotes demandées sont alors les droites  $oo'$ ,  $oo''$ . On voit qu'elles passent par deux points fixes de l'axe radical  $ab$ . Ainsi :

*Les asymptotes des coniques  $M_s$  passent par deux points fixes situés sur l'axe radical des circonférences données.*

Comme ces points fixes appartiennent à E, ainsi que le point de rencontre  $o$  des asymptotes, l'angle compris entre ces droites est constant, quelle que soit la conique  $M_s$ ; par suite :

*Les coniques  $M_s$  sont semblables entre elles.*

Ceci s'étend évidemment aux coniques  $M_{s'}$ .

On peut encore arriver à ce résultat en remarquant que les axes de M partagent la normale  $im$  à cette courbe en segments dont le rapport est constant, quelle que soit la position de  $m$  sur I.

Les trois parties de la question proposée étant ainsi démontrées, j'énoncerai en outre les propriétés suivantes :

*Les axes d'une conique  $M_s$  sont rencontrés par la normale, telle que  $im$ , en des points qui appartiennent à deux circonférences concentriques à I et qui sont tangentes à E.*

*Les extrémités des diamètres des coniques  $M_{s'}$ , respectivement parallèles aux tangentes telles que  $mf$ , appartiennent à une circonférence concentrique à F.*

*Les droites  $oo'$ ,  $oo''$  interceptent, sur la tangente  $mf$  à I, un segment, qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de  $m$  sur I.*

---

# DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS DE M. LIONNET;

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 514 );

PAR M. MORET-BLANC.

I. *L'unité est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs.*

Il faut résoudre en nombres entiers l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = y^2 + (y+1)^2 = 2y^2 + 2y + 1,$$

ou, en multipliant par 8 et ajoutant 1,

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 &= (4y+2)^2 + 5, \\ (2x+4y+3)(2x-4y-1) &= 5, \end{aligned}$$

ce qui exige que l'on ait, en se bornant aux solutions positives,

$$2x + 4y + 3 = 5,$$

$$2x - 4y - 1 = 1,$$

d'où

$$x = 1, \quad y = 0, \quad \frac{x(x+1)}{2} = 1.$$

II. *Dix est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux impairs consécutifs.*

Il faut trouver les solutions entières de l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = (2y-1)^2 + (2y+1)^2 = 8y^2 + 2,$$

d'où, en multipliant par 8 et ajoutant 1 aux deux membres,

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 &= 64y^2 + 17, \\ (2x+8y+1)(2x-8y+1) &= 17. \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$2x + 8y + 1 = 17,$$

$$2x - 8y + 1 = 1,$$

d'où

$$x = 4, \quad y = 1, \quad \frac{x(x+1)}{2} = 10 = 1^2 + 3^2;$$

c'est la seule solution entière et positive.

III. 1 et 5 sont les deux seules sommes consécutives de deux carrés d'entiers consécutifs dont le produit égale une somme de deux carrés d'entiers consécutifs.

L'équation à résoudre est

$$[x^2 + (x+1)^2][(x+1)^2 + (x+2)^2] = y^2 + (y+1)^2,$$

ou

$$4x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 16x + 5 = 2y^2 + 2y + 1,$$

ou, en retranchant 1 de chaque membre et divisant par 2,

$$2(x+1)^4 = y(y+1).$$

Les facteurs  $y$  et  $(y+1)$  étant premiers entre eux, il faut que l'un soit une quatrième puissance, et l'autre le double d'une quatrième puissance. Posons

$$y = u^4, \quad y+1 = 2v^4, \quad \text{d'où} \quad x+1 = uv;$$

il en résulte

$$1 = 2v^4 - u^4 \quad \text{ou} \quad 1 + u^4 = 2v^4.$$

Mais la somme de deux bicarrés n'est jamais égale au double d'un bicarré, à moins qu'ils ne soient égaux; donc

$$u = 1 = v, \quad x = 0, \quad y = 1,$$

d'où la solution

$$(0^2 + 1^2)(1^2 + 2^2) = 1^2 + 3^2; \quad 1 \times 5 = 1 + 4.$$

Si l'on pose

$$y = 2u^4, \quad y + 1 = v^4, \quad \text{d'où} \quad v^4 - 1 = 2u^4,$$

il faut que l'on ait

$$v = 1, \quad u = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -1, \quad y = 0, \\ [(-1)^2 + 0^2](0^2 + 1^2) = 0^2 + 1^2, \quad -1 \times 1 = 1;$$

mais il faut alors considérer des entiers négatifs.

La première solution trouvée est donc la seule en nombres entiers positifs.

IV. *Quand un nombre triangulaire T égale le produit de deux entiers consécutifs dont le plus petit est double d'un triangulaire,  $4T + 1$  est, ainsi que sa racine carrée, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.*

Soit

$$T = \frac{y(y+1)}{2} = (x^2 + x)(x^2 + x + 1),$$

$$4T + 1 = 2y^2 + 2y + 1 = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1,$$

ou

$$4T + 1 = y^2 + (y+1)^2 = [x^2 + (x+1)^2]^2,$$

ce qui démontre le théorème.

*Il en résulte que, pour  $T = 0$  et  $T = 6$ , 1 et 5 sont, ainsi que leurs carrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. On démontre facilement, avec ou sans les imaginaires, que 1 et 5 sont les seuls nombres premiers ayant cette double propriété; et, de même, pour 1 et 13 qui sont, ainsi que leurs bicarrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. Mais on ignore si un ou plusieurs nombres composés ont l'une de ces doubles propriétés.*

(LIONNET.)

Cherchons un nombre qui soit, ainsi que son carré.



la somme des carrés de deux entiers consécutifs. Il faut résoudre l'équation

$$[x^2 + (x+1)^2]^2 = y^2 + (y+1)^2 \quad (1).$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} (x+1+x\sqrt{-1})^2 (x+1-x\sqrt{-1})^2 \\ = [y+(y+1)\sqrt{-1}] [y+(y+1)\sqrt{-1}]. \end{aligned}$$

Si le premier membre est le carré d'un nombre premier, ses deux facteurs sont premiers entre eux, ainsi que les facteurs du second membre, qui sont alors nécessairement des carrés.

On doit donc avoir

$$(1) \quad \begin{cases} y+(y+1)\sqrt{-1} = (x+1+x\sqrt{-1})^2 = 2x+1+2x(x+1)\sqrt{-1}, \\ y-(y+1)\sqrt{-1} = (x+1-x\sqrt{-1})^2 = 2x+1-2x(x+1)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} y+(y+1)\sqrt{-1} = 2x+1-2x(x+1)\sqrt{-1}, \\ y-(y+1)\sqrt{-1} = 2x+1+2x(x+1)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

(1) Cette équation revient à

$$(1) \quad (2x+1)^2 + [2x(x+1)]^2 = y^2 + (y+1)^2;$$

et l'on sait qu'un nombre *premier* ne peut être que d'une seule manière, la somme de deux carrés de nombres positifs, et qu'il en est de même du carré d'un nombre premier: par conséquent, lorsque le nombre  $x^2+(x+1)^2$  est premier, l'équation (1) donne

$$2x+1 = y, \quad 2x(x+1) = y+1,$$

ou

$$2x+1 = y+1, \quad 2x(x+1) = y.$$

Dans le premier cas on a

$$x=1, \quad y=3, \quad x^2+(x+1)^2=5;$$

et dans le second

$$x=0, \quad y=0, \quad x^2+(x+1)^2=1 \quad (6)$$

Le premier système donne

$$y = 2x + 1, \quad y + 1 = 2x^2 + 2x,$$

d'où

$$x^2 = 1, \quad x = \pm 1;$$

$x = -1$  donne

$$[(-1)^2 + 0^2]^2 = 0^2 + 1^2,$$

ou bien

$$(0^2 + 1^2)^2 = 0^2 + 1^2;$$

$x = 1$  donne

$$(1^2 + 2^2)^2 = 3^2 + 4^2 \quad \text{ou} \quad 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Le second système ne donne pour  $x$  que des valeurs irrationnelles : 1 et 5 sont donc les seuls nombres premiers qui jouissent de la propriété énoncée.

On démontrerait de la même manière que 1 et 13 sont les seuls nombres premiers qui soient, ainsi que leurs bicarrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. La question a été résolue dans les *Nouvelles Annales* (t. XIX, p. 472).

Les équations posées, toujours suffisantes, sont aussi nécessaires dans le cas où le nombre  $N$  est premier; leur solution prouve que 1 et 13 sont les seuls nombres premiers satisfaisant aux conditions posées.

Mais, quand le nombre  $n$  n'est pas premier, les équations (1) et (2) ne sont plus nécessaires, car

$$y + (y + 1)\sqrt{-1}$$

n'est plus nécessairement un carré.

Toutefois, s'il y a un ou plusieurs nombres non premiers jouissant de la double propriété énoncée, ce ne peut être que parmi les nombres très grands. Les nombres qui jouissent de cette propriété que leur carré est la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs forment une suite récurrente

$$1, 5, 29, 169, 985, \dots$$

telle que chaque terme est égal à six fois le précédent moins l'antéprécédent. J'ai vérifié que, jusqu'à  $10^{25}$ , 1 et 5 sont les seuls nombres de cette suite qui soient la somme des deux carrés consécutifs.

De même 169 est le seul, avec 1, qui soit le carré d'un nombre qui est lui-même la somme de deux entiers consécutifs; 1 et 13 sont donc, jusqu'à la même limite, les seuls nombres qui soient, ainsi que leurs bicarrés, la somme de deux carrés consécutifs.

V. *Aucun produit 1, 3, 5, 7, 9, . . . de plusieurs impairs consécutifs n'est égal à un nombre entier élevé à une puissance d'un degré supérieur à l'unité.*

LEMME. — Entre  $a$  et  $2a - 2$ , il y a toujours, au moins, un nombre premier, si  $a$  est  $> \frac{7}{2}$  (postulatum de M. Bertrand démontré par M. Tchebichef. Voir SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 203) et par un *a fortiori*, entre  $a > 1$  et  $2a$ , il y a au moins un nombre premier.

Cela posé, dans le produit des  $n$  premiers nombres impairs

$$1.3.5.7.9 \dots (2n - 1),$$

il y a entre  $n$  et  $2n$  au moins un nombre premier, qui n'entre dans le produit qu'à la première puissance; donc ce produit ne peut pas être une puissance d'un nombre entier d'un degré supérieur à l'unité.

VI. *Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme ou la différence des cubes soit égale au carré d'un nombre entier.*

1° Soit

$$x^3 + (x + 1)^3 = y^2,$$

ou

$$(2x + 1)(x^2 + x + 1) = y^2.$$

Les deux facteurs  $2x + 1$  et  $x^2 + x + 1$  sont premiers entre eux ou bien ils ont pour plus grand commun diviseur 3. En effet, tout nombre divisant ces deux facteurs divisera leur différence  $x(x - 1)$ , et par suite  $x - 1$  et  $2x + 1 - 2(x - 1) = 3$ .

Le plus grand commun diviseur des deux facteurs est donc 1 ou 3.

Si  $2x + 1$  et  $x^2 + x + 1$  sont premiers entre eux, chacun d'eux doit être un carré. Posons donc

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= \alpha^2, \\ 2x + 1 &= \beta^2;\end{aligned}$$

d'où, en éliminant  $x$ ,

$$4\alpha^2 - \beta^4 = 3 = (2\alpha + \beta^2)(2\alpha - \beta^2).$$

Il faut donc qu'on ait

$$\begin{aligned}2\alpha + \beta^2 &= 3, \\ 2\alpha - \beta^2 &= 1;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\alpha = \beta^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 1, \\ 0^3 + 1^3 = 1^2.\end{aligned}$$

Si  $x^2 + x + 1$  et  $2x + 1$  ont pour plus grand commun diviseur 3, chacun d'eux doit être le triple d'un carré. Posons donc

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= 3\alpha^2, \\ 2x + 1 &= 3\beta^2,\end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de  $x$ ,

$$\begin{aligned}4\alpha^2 - 1 &= 3\beta^4, \\ (2\alpha + 1)(2\alpha - 1) &= 3\beta^4.\end{aligned}$$

$2\alpha + 1$  et  $2\alpha - 1$  étant premiers entre eux, il faut que l'on ait

$$2\alpha + 1 = 3u^4, \quad 2\alpha - 1 = v^4, \quad \text{d'où} \quad 2 = 3u^4 - v^4$$



ou

$$2x + 1 = u^4, \quad 2x - 1 = 3v^4, \quad \text{d'où} \quad 2 = u^4 - 3v^4,$$

impossible suivant le module 3.

Il reste donc à résoudre l'équation

$$3u^4 - v^4 = 2,$$

qui admet la solution évidente

$$u = 1, \quad v = 1, \quad \text{d'où} \quad x = \beta = 1, \quad x = 1, \quad y = 3.$$

Elle n'en admet pas d'autre. En effet, M. Lucas, dans ses *Recherches sur l'analyse indéterminée*, page 46, a résolu l'équation

$$3x^4 - y^4 = 2z^2,$$

qui admet une infinité de solutions, dont une seule correspond à  $z = 1$ .

En résumé, les seuls couples de nombres consécutifs dont la somme des cubes soit égale au carré d'un nombre entier sont 0 et 1, 1 et 2.

2° Soit

$$(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = y^2,$$

ou, en multipliant par 4,

$$3(2x + 1)^2 + 1 = (2y)^2,$$

et, en posant

$$2y = u, \quad 2x + 1 = v,$$

$$u^2 - 3v^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont toutes données par les deux termes des réduites de rang pair dans le développement de  $\sqrt{3}$  en fraction continue; mais il ne faut prendre que celles dont le numérateur est pair. On a ainsi

$$u = 2, 26, 362, 5042, \dots$$

$$v = 1, 15, 209, 2921, \dots$$

et, par suite,

$$y = 1, 13, 181, 2521, \dots$$

$$x = 0, 7, 104, 1455, \dots$$

Ces valeurs forment deux suites récurrentes dont les échelles de relation sont respectivement

$$y_{n+1} = 14y_n - y_{n-1}, \quad x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1} + 6.$$

Ce second problème admet donc une infinité de solutions, toutes données par les deux suites ci-dessus

$$1^3 - 0^3 = 1^2,$$

$$8^3 - 7^3 = 13^2,$$

$$105^3 - 104^3 = 181^2,$$

.....

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1881

(SECONDE SESSION).

### *Géométrie analytique.*

On donne une parabole  $y^2 = 2px$ , rapportée à son axe et à son sommet, et un point P ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) dans le plan de la courbe.

1° Démontrer que du point P on peut, en général, mener trois normales à la parabole; former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds A, B, C de ces normales.

2° Démontrer que chacune des deux courbes

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0,$$

$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

passent par les quatre points A, B, C, P, et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points.

3° Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes A, B, C et en un quatrième point D : trouver les coordonnées du point D.

4° Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec la parallèle DD' menée à l'axe de la parabole par le point D. Former et discuter l'équation du lieu de ce point de rencontre.

### *Trigonométrie.*

On donne dans un triangle

$$a = 567^{\text{m}}, 47,$$

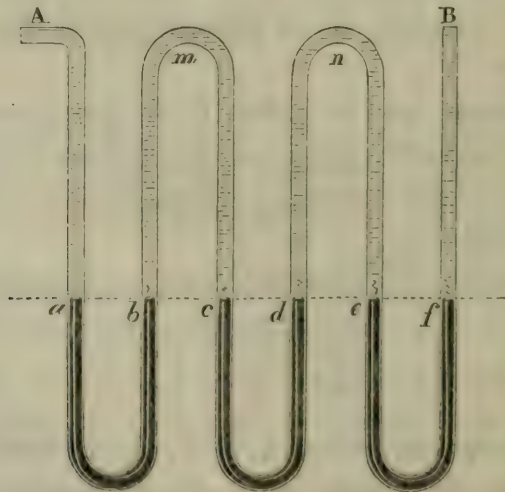
$$b = 3643^{\text{m}}, 28,$$

$$C = 75^{\circ} 37' 57'', 4.$$

Calculer A, B, c et S.

### *Physique et Chimie.*

I. On a six tubes de verre qui communiquent entre



eux alternativement par le bas et par le haut. Tous

ces tubes renferment du mercure au même niveau *abcdef*, et au-dessus du mercure, dans les parties *bmc*, *dne*, se trouve de l'eau.

On met la branche A en communication avec un réservoir renfermant de l'air comprimé sous la pression de  $2^m, 30$ , en colonne de mercure. A quelle hauteur doit monter le mercure dans le tube B, au-dessus du plan *af*?

Densité du mercure.....	13,5
Pression atmosphérique.....	0,760

II. Préparation de l'acide sulfurique anhydre, de l'acide sulfurique de Nordhausen et de l'acide sulfurique ordinaire.

Quel est le volume d'acide sulfurique ( $\text{SO}_3, \text{HO}$ ) qu'on obtient au moyen de  $250^{\text{kg}}$  de soufre?

Équivalents.

H = 1,

O = 8,

S = 16.

Densité de l'acide sulfurique .....	1,848.
-------------------------------------	--------

*Épure.*

Représenter par ses deux projections la partie, extérieure à une sphère donnée, du solide compris entre un hyperboloïde de révolution à une nappe, son cône asymptote, un plan horizontal, à la cote  $0^m, 200$ , et le plan horizontal de projection.

L'hyperboloïde a son axe ( $z, z'$ ) vertical à  $0^m, 110$  du plan vertical de projection et au milieu de la feuille; son collier, dont la cote vaut  $0^m, 120$ , et sa trace horizontale ont respectivement des rayons égaux à  $0^m, 050$  et à  $0^m, 110$ .



La sphère donnée, dont le centre  $(O, O')$  se trouve sur le plan de profil conduit par l'axe de l'hyperboloïde, à 0<sup>m</sup> 198 du plan vertical et à 0<sup>m</sup>, 102 du plan horizontal, passe par le sommet  $(S, S')$  du cône asymptote.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque des lignes d'intersection de la sphère avec l'hyperboloïde et son cône asymptote, et les tangentes en ces points.

Titre extérieur.... Intersection de surfaces.

Titre intérieur.... Hyperboloïde et cône entaillés par une sphère.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0<sup>m</sup>, 222 du petit côté inférieur.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1367

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 381);

PAR M. MORET-BLANC.

1<sup>o</sup> Si une équation  $f(x) = 0$  est ordonnée et de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \psi x = 0,$$

$\varphi$  et  $\psi$  n'ayant que des permanences et  $\alpha, \beta, \gamma$  étant des nombres positifs, tels que  $\beta^2 = \alpha\gamma$ , l'équation n'a pas de racines réelles positives.

2<sup>o</sup> Si quatre coefficients consécutifs d'une équation

sont  $b + c$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $b - c$ , de sorte que

$$f(x) = \dots (b + c)x^{p-1} + bx^p + cx^{p-1} \\ + (b - c)x^{p-2} + \dots = 0,$$

*l'équation a des racines imaginaires.*

3° Si quatre coefficients consécutifs sont  $a$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $b$ , de telle sorte que

$$f(x) = \dots ax^{p+1} + bx^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \dots = 0,$$

*l'équation a au moins deux racines imaginaires.*

On propose de généraliser cette proposition et de faire voir que si trois coefficients consécutifs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  se reproduisent trois fois périodiquement, de telle sorte que l'on trouve dans l'équation  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  comme étant neuf coefficients consécutifs, l'équation a au moins quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.

En supposant que les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_p$  se reproduisent  $p$  fois périodiquement, dire combien l'équation a, au moins, de racines imaginaires.

On distinguera les cas de  $p$  pair et de  $p$  impair.

(G. DE LONGCHAMP.)

$$1^\circ \quad \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} = x^{p-2} (\alpha x^2 - \beta x + \gamma).$$

L'équation  $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$  ayant ses racines imaginaires le trinôme  $\alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2}$  est positif pour toute valeur positive de  $x$ ; il en est de même de  $\varphi(x)$  et de  $\psi(x)$ , qui n'ont que des termes positifs; donc, pour toute valeur positive de  $x$ , le premier membre de l'équation  $f(x) = 0$ , étant la somme de trois quantités positives, ne peut être nul: donc, etc.

*Note.* — On suppose que tous les coefficients de  $\psi(x)$  sont positifs et qu'il y a un terme indépendant de  $x$ , sans quoi l'équation aurait une racine positive ou nulle.

2° Je m'appuierai sur ce lemme bien connu: Si une

équation ordonnée présente une lacune de  $p$  termes consécutifs, l'équation a au moins  $p$  ou  $p - 1$  racines imaginaires, suivant que  $p$  est pair ou impair.

Cela posé, l'équation  $f(x) = 0$  admet les mêmes racines imaginaires que l'équation

$$(x^2 + x - 1)f(x) = 0;$$

or celle-ci présente une lacune de deux termes consécutifs, les termes en  $x^{p+1}$  et  $x^p$ ; donc cette équation, et par suite aussi  $f(x) = 0$ , a au moins deux racines imaginaires.

3° L'équation  $f(x) = 0$  a les mêmes racines imaginaires que l'équation  $(x^2 - 1)f(x) = 0$ , qui présente une lacune de deux termes consécutifs; donc elle a au moins deux racines imaginaires.

*Généralisation.* — Si  $a, b, c; a, b, c; a, b, c$  sont neuf coefficients consécutifs de l'équation  $f(x) = 0$ , l'équation

$$(x^3 - 1)f(x) = 0,$$

ayant une lacune de six termes consécutifs, a au moins six racines imaginaires, et comme  $x^3 - 1 = 0$  en a deux, l'équation  $f(x) = 0$  a au moins quatre racines imaginaires.

Si les coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_p$  se reproduisent  $p$  fois périodiquement, l'équation

$$(x^p - 1)f(x) = 0$$

aura une lacune de  $(p - 1)p$  termes consécutifs, et par suite, au moins,  $p(p - 1)$  racines imaginaires. L'équation

$$x^p - 1 = 0$$

a  $p - 2$  ou  $p - 1$  racines imaginaires, suivant que  $p$  est pair ou impair : donc le nombre minimum des racines

imaginaires de l'équation  $f(x) = 0$  est

$$(p-1)p - (p-2) = (p-1)^2 - 1$$

si  $p$  est pair, et

$$(p-1)p - (p-1) = (p-1)^2$$

si  $p$  est impair.

### Question 1368

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 382);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

*Soient*  $OA = OB = OC$  *trois longueurs égales portées sur trois axes rectangulaires;*  $A_1, B_1, C_1$  *les projections orthogonales des points*  $A, B, C$  *sur un plan quelconque passant par le point*  $O$ .

*Si l'on pose*

$$OA_1 = a, \quad OB_1 = b, \quad OC_1 = c,$$

$$\widehat{B_1OC_1} = \alpha, \quad \widehat{C_1OA_1} = \beta, \quad \widehat{A_1OB_1} = \gamma,$$

*on aura*

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{b^2}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{c^2}{\sin \gamma \cos \gamma} = l^2,$$

$$AA_1 = \frac{a}{\cos \alpha} \sqrt{-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma},$$

$$BB_1 = \frac{b}{\cos \beta} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

$$CC_1 = \frac{c}{\cos \gamma} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

*et*

$$OA = l \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \quad (1).$$

*Discuter ces formules.*

(GENTY.)

(<sup>1</sup>) Il est, je présume, implicitement supposé que le plan mené par le point  $O$  laisse d'un même côté les trois droites  $OA, OB, OC$ . Car si



I. On a

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= AB^2 = A_1B_1^2 + (AA_1 - BB_1)^2 \\ &= OA_1^2 + OB_1^2 - 2OA_1OB_1 \cos A_1OB_1 \\ &\quad + AA_1^2 + BB_1^2 - 2AA_1BB_1 \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA_1OB_1 \cos A_1OB_1 - 2AA_1BB_1, \end{aligned}$$

d'où

$$AA_1 \cdot BB_1 = -ab \cos \gamma.$$

Pareillement

$$AA_1 \cdot CC_1 = -ac \cos \beta, \quad BB_1 \cdot CC_1 = -bc \cos \alpha,$$

et, par suite,

$$AA_1^2 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = a^2 bc \cos \beta \cos \gamma,$$

$$AA_1^2 = -\frac{a^2 \cos \beta \cos \gamma}{\cos \alpha},$$

l'une de ces droites, OA par exemple, était située d'un côté de ce plan et OB, OC de l'autre côté, les angles  $A_1OB_1$ ,  $A_1OC_1$  seraient aigus, et  $B_1OC_1$  obtus; les rapports  $\frac{b^2}{\sin \beta \cos \beta}$ ,  $\frac{c^2}{\sin \gamma \cos \gamma}$  seraient positifs, et  $\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$  négatif, et par conséquent on n'aurait pas

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{b^2}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{c^2}{\sin \gamma \cos \gamma}.$$

Lorsque le plan passant par le point O laisse d'un même côté les trois droites OA, OB, OC, les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont obtus, et les rapports

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad \frac{b^2}{\sin \beta \cos \beta}, \quad \frac{c^2}{\sin \gamma \cos \gamma}$$

sont, tous trois, négatifs. Dans ce cas, les égalités

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = -l^2$$

et

$$OA = l\sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

donnent à  $l$ , et par suite à OA, une valeur imaginaire. En posant

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = -l^2,$$

on trouve, en réalité,

$$OA = l\sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}. \quad (G.)$$

ou bien

$$AA_1 = \frac{a}{\cos \alpha} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

On aura de même

$$BB_1 = \frac{b}{\cos \beta} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

et

$$CC_1 = \frac{c}{\cos \gamma} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

II. On a

$$\begin{aligned} OA^2 &= OA_1^2 + AA_1^2 = a^2 - \frac{a^2 \cos \beta \cos \gamma}{\cos \alpha} \\ &= \frac{a^2}{\cos \alpha} (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma). \end{aligned}$$

Mais

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ,$$

donc

$$\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma = -\sin \beta \sin \gamma$$

et

$$OA^2 = -\frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha} = -\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

De même

$$OB^2 = -\frac{b^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta \cos \beta}, \quad OC^2 = -\frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma},$$

et, parce que  $OA = OB = OC$ , on a

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{b^2}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{c^2}{\sin \gamma \cos \gamma}.$$

L'égalité  $OA^2 = -\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \cos \alpha}$  donne

$$OA^2 = \left( -\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

ou, en posant  $-\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = l^2$ ,

$$OA = l \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

*Note.* La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

## Question 1375

PAR M. CHOUDADOV, à Stavropol (Caucase).

*D'un point S extérieur à un cercle O on mène à ce cercle la tangente SA, et au centre O la sécante SO qui coupe la circonférence en B et C. Le point de contact A de la tangente sépare la demi-circonférence ABC en deux arcs AMB, ANC qui forment les troisièmes côtés de deux triangles mixtilignes SAMB et SANC. Si l'on fait tourner la figure autour de SO, ces deux triangles mixtilignes engendrent des volumes qui sont respectivement équivalents aux deux cônes ayant pour rayons de base les deux segments SB et SC de la sécante, et pour hauteur commune la projection OD du rayon de contact OA sur cette sécante; c'est-à-dire que*

$$\text{vol. SAMB} = \frac{1}{3} \pi \overline{SB}^2 OD,$$

et

$$\text{vol. SANC} = \frac{1}{3} \pi \overline{SC}^2 OD. \quad (\text{DOSTOR.})$$

Soit R le rayon du cercle O.

I. Le volume engendré par le triangle mixtiligne SAMB est la différence des volumes du cône décrit par le triangle SAD et du segment sphérique à une base, engendré par BMAD.

Le volume du cône

$$\text{SAD} = \frac{\pi}{3} \overline{AD}^2 SD,$$

ou, parce que

$$\overline{AD}^2 = SD \cdot OD,$$

on a

$$\text{vol. cône SAD} = \frac{\pi}{3} SD^2 OD = \frac{\pi}{3} OD (SB^2 + 2 SB \cdot BD + BD^2)$$

ou

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vol. c\^one SAD} = \frac{1}{3} \pi \overline{SB}^2 OD \\ + \frac{1}{3} \pi OD (2 \cdot SB \cdot BD + BD^2). \end{array} \right.$$

D'autre part, le segment sphérique

$$BMAD = \pi \cdot BD^2 \left( R - \frac{1}{3} BD \right) = \frac{\pi}{3} BD^2 (2R + OD).$$

Mais les triangles rectangles BAC, SAO donnent

$$CD \cdot BD = SD \cdot OD$$

ou

$$(R + OD)BD = (SB + BD)OD; \quad R \cdot BD = SB \cdot OD.$$

En remplaçant  $R \cdot BD$  par  $SB \cdot OD$  dans l'expression  $\frac{\pi}{3} BD^2 (2R + OD)$  du segment sphérique, il vient

$$(2) \text{ segment sphérique } BMAD = \frac{1}{3} \pi OD (2SB \cdot BD + DB^2)$$

et des formules (1) et (2) résulte immédiatement

vol. c\^one SAD — segment sphérique BMAD

$$\text{ou vol. SAMB} = \frac{1}{2} \pi SB^2 OD.$$

II. De même,

$$\text{vol. SANC} = \text{vol. SAD} + \text{vol. DANC},$$

$$\text{vol. SAD} = \frac{\pi}{3} SD^2 OD.$$

$$\text{vol. DANC} = \pi \cdot CD^2 \left( R - \frac{1}{3} CD \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} CD^2 (3R - CD) = \frac{\pi}{3} CD^2 (R + BD),$$

ou, parce que  $R + BD = OD + 2BD$ ,

$$\text{vol. DANC} = \frac{\pi}{3} CD^2 (OD + 2BD).$$



Mais  $CD \cdot BD = SD \cdot OD$ , donc

$$\text{vol. DANC} = \frac{\pi}{3} OD (CD^2 + 2SD \cdot CD).$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \text{vol. SAD} + \text{vol. DANC} &= \frac{\pi}{3} OD (SD^2 + CD^2 + 2SD \cdot CD) \\ &= \frac{\pi}{3} OD (SD + CD)^3 = \frac{\pi}{3} OD \cdot SC^3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{vol. SANC} = \frac{\pi}{3} SC^3 OD, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Lez : Pisani ; Goffart ; Lucien Meyer ; Henri Vieille et A. Leblond, élèves du lycée du Havre.

### Question 1377

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 326.)

PAR M. FRANÇOIS BÖRLETTI.

Ingénieur à Milan.

*Trouver les valeurs des intégrales*

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}} \\ \text{et} &\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^2-x-2}}. \end{aligned} \quad (\text{RÉALIS.})$$

I. La première de ces deux intégrales peut s'écrire

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3x+1)^2-1}},$$

et, en posant  $(x^2+3x+1)^2-1 = z^2$ , elle devient

$$\int \frac{dz}{1-z^2} = \text{arc tang } z + C;$$

donc

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}} \\ = \text{arc tang} \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)} + C.$$

II. La seconde intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x^2-x-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^3+x^2-x-1)-1}},$$

et, en posant  $x^3+x^2-x-2=z^2$ , elle devient

$$2 \int \frac{dz}{1+z^2} = 2 \text{ arc tang } z + C;$$

donc

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}} \\ = 2 \text{ arc tang} \sqrt{x^3+x^2-x-2} + C.$$

Ces deux intégrales sont des cas particuliers de l'intégrale plus générale

$$\int \frac{\varphi'_i(x)}{\varphi_i(x)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi_i^m(x)-1}} = \frac{2}{m} \text{ arc tang} \sqrt{\varphi_i^m(x)-1} + C,$$

$m$  désignant un nombre quelconque différent de zéro.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Pisani, Lez, Fauquembergue.

### Question 1379

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 527);

PAR M. FRANÇOIS BORLETTI,

Ingénieur à Milan.

*Les trois côtés  $a, b, c$  d'un triangle sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; et si l'on ajoute successivement 50 et 60 à chacun de ces côtés, le rayon du cercle inscrit augmente respective-*

ment de 17 et de 20 : trouver les valeurs des côtés de ce triangle.

(W.-A. WHITWORTH, M. A.)

Soient  $r$  le rayon du cercle inscrit dans le triangle et  $p$  le demi-périmètre; on a

$$(1) \quad r^2 p = (p - a)(p - b)(p - c).$$

En nommant  $d$  la raison de la progression arithmétique, les côtés seront

$$a, \quad b = a + d, \quad c = a + 2d,$$

et l'équation (1) devient

$$12r^2 = (a - d)(a + 3d).$$

Si l'on ajoute successivement 50 et 60 à chacun des côtés, le rayon du cercle inscrit augmente respectivement de 17 et de 20; donc

$$12(r + 17)^2 = (a - d + 50)(a + 3d + 50),$$

$$12(r + 20)^2 = (a - d + 60)(a + 3d + 60),$$

En posant  $a - d = x$ ,  $a + 3d = y$ , ces équations deviennent

$$(2) \quad 12r^2 = xy,$$

$$(3) \quad 12(r + 17)^2 = xy + 50(x + y) + 2500,$$

$$(4) \quad 12(r + 20)^2 = xy + 60(x + y) + 3600,$$

et, en retranchant de chacune des équations (3) et (4) de l'équation (2), membre à membre, on a

$$204r + 484 = 25(x + y),$$

$$8r + 20 = x + y;$$

d'où

$$x + y = 52 \quad \text{et} \quad r = 4,$$

et par suite

$$xy = 192.$$

Donc,  $x$  et  $y$  sont les racines de l'équation

$$z^2 - 52z + 192 = 0;$$

on en déduit

$$x = 48 \quad \text{et} \quad y = 4.$$

Par conséquent,

$$a + 3d = 48$$

et

$$a - d = 4.$$

Ces deux équations donnent

$$a = 15, \quad d = 11;$$

donc les valeurs des côtés du triangle sont 15, 26, 37.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Lez; Pisani; J. Thomas, maréchal de logis d'artillerie de Marine, à Toulon; Henri Vieille, élève du lycée du Havre.

### Question 1380

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 527 );

PAR M. A. LEBLOND,

Élève du lycée du Havre.

*Si, par les points de contact d'une tangente commune à deux circonférences qui se coupent, et par un de leurs points d'intersection, on fait passer une circonférence, son rayon sera moyen géométrique entre les rayons des deux premiers cercles.*

( DOMENICO MONTESANO. )

Soient

O, O' les centres des circonférences données (1);

A, B les points de contact de la tangente commune considérée;

D un des points d'intersection des deux circonférences;

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.



C le centre de la circonférence circonscrite au triangle ABD.

Les angles AOC, DCO' sont égaux, car ils ont chacun même mesure que l'angle DAB. On a, de même,

$$\widehat{ACO} = \widehat{ABD} = \widehat{CO'D}.$$

Donc, les triangles ACO et CDO' sont semblables et donnent

$$\frac{AO}{CD} = \frac{AC}{DO'},$$

d'où

$$AC^2 = AO \cdot DO'. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Note.* — Solutions analogues de MM. François Borletti, ingénieur à Milan; J. Pisani; Edmond van Aubel; Lacombe, abonné; J. Thomas, maréchal des logis d'Artillerie de marine, à Toulon; Joseph Nadal, élève au lycée de Toulouse; Henri Vielle, du lycée du Havre; J. Boudènes, du lycée d'Avignon; P., du lycée de Toulouse.

La même question a été résolue, au moyen des formules de la Trigonométrie, par M. Lez; par M. Marcolongo.

M. Domenico Montesano en a donné une solution fondée sur la théorie de l'involution.

### Question 1386

( voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 141 );

PAR M. MORET-BLANC.

Soient A, B, C, D quatre points pris arbitrairement sur un cercle ayant pour centre le point O. Considérons l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points, et de son centre  $\omega$  abaissons une perpendiculaire  $\omega P$  sur un côté quelconque AB du quadrilatère ABCD; du centre O du cercle, abaissons une perpendiculaire OQ sur le côté opposé CD. En désignant par V l'angle que font les côtés opposés AB et CD, démontrer la relation

$$\omega P = OQ \cos V. \quad (\text{LAGUERRE.})$$

Q est le milieu de CD; soient R le milieu de AB et I le milieu de QR.

Prolongeons AB et CD jusqu'à leur rencontre en V, puis menons QS et RS respectivement parallèles à AB et à CD, et tirons les droites OR,  $\omega Q$ ,  $\omega R$  <sup>(1)</sup>.

On sait que, si par les milieux de deux cordes d'une hyperbole équilatère on leur mène respectivement des parallèles, le point d'intersection de ces parallèles, les milieux des deux cordes et le centre de l'hyperbole sont sur une même circonférence, théorème qui résulte très simplement de ce que deux diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère font avec un des axes des angles complémentaires.

Le quadrilatère  $\omega QSR$  est donc inscriptible, de même que le quadrilatère OQVR, dont les angles en Q et en R sont droits. Les circonférences circonscrites à ces quadrilatères, qui sont les circonférences circonscrites aux triangles QSR, QVR, sont symétriques par rapport au point I. Il en résulte que l'angle

$$Q\omega R = QOR = 180^\circ - V.$$

Les cordes AB et CD communes au cercle et à l'hyperbole sont également inclinées sur les axes de l'hyperbole : leurs diamètres conjugués  $\omega Q$ ,  $\omega R$  font donc avec ces cordes, et, par suite, avec leurs perpendiculaires OQ, OR, des angles égaux ; donc

$$\omega QO = \omega RO = V,$$

et le quadrilatère  $\omega QOR$  est un parallélogramme ;  $\omega R = \omega Q$  et  $\omega P$  est le prolongement de  $Q\omega$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \widehat{R\omega P} &= 180^\circ - \widehat{Q\omega R} = V, \\ \omega P &= \omega R \cos V = OQ \cos V, \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

*Note.* — La même question a été résolue par M. E. Picardeau, du lycée de Clermont.

---

(<sup>1</sup>) Le lecteur est prié de faire la figure.

## Question 1397

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 528);

PAR M. MORET-BLANC.

*On donne une conique inscrite dans un triangle ABC ; par les sommets du triangle on mène des droites AA', BB', CC' se coupant en un point O, et par leur point de rencontre A', B', C' avec les côtés opposés, des tangentes à la conique qui coupent les droites B'C', C'A', A'B' en des points a, b, c. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite. (E. FAUQUEMBERGUE.)*

Soient A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> les intersections des couples de tangentes menées respectivement par B' et C', C' et A', A' et B'; A'B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>A<sub>1</sub>B'C<sub>1</sub>A' peut être considéré comme un hexagone circonscrit à la conique. En vertu du théorème de Brianchon, les droites A'A<sub>1</sub>, B'B<sub>1</sub>, C'C<sub>1</sub> qui joignent les sommets opposés se rencontrent en un même point; les triangles A'B'C', A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> sont donc homologues, et les côtés homologues B'C' et B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, C'A' et C<sub>1</sub>A<sub>1</sub>, A'B' et A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> se rencontrent en des points a, b, c situés en ligne droite.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Strékalof, à Saint-Petersbourg.

## QUESTIONS.

1411. Démontrer que l'expression

$$\frac{1}{n} \left[ \left( \frac{n}{n+1} \right)^p + \left( \frac{n}{n+2} \right)^p + \left( \frac{n}{n+3} \right)^p + \dots \right]$$

tend vers  $\frac{1}{p-1}$ , lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

(E. CÉSARO.)

1412. Par le sommet B d'un triangle ABC, on mène une parallèle à la base, la médiane, la bissectrice et la hauteur; du milieu D de la base, on abaisse sur la bissectrice une perpendiculaire DH qui rencontre en E et F la hauteur et la parallèle à la base; il s'agit de démontrer que  $DA^2 = DH \times EF$ . (A. CAMBIER.)

1413. Si par un point quelconque M de la sécante commune à deux coniques homothétiques on mène une droite quelconque coupant la première en A et B, la seconde en A' et B', les produits  $MA \times MB$  et  $MA' \times MB'$  seront égaux. (P. BARBARIN.)

1414. Soient, dans deux plans rectangulaires, deux circonférences ayant respectivement pour diamètres deux segments conjugués harmoniques de l'intersection de ces plans; si de deux points quelconques de l'une de ces circonférences on mène des droites à deux points quelconques de l'autre, on formera un quadrilatère gauche (en général) dont deux côtés opposés auront le même produit que les deux autres côtés opposés <sup>(1)</sup>.

(H. SCHRÖTER.)

1415. Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + (\alpha x + \beta)^2}},$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes données. (S. REALIS.)

(<sup>1</sup>) Soient A, B deux points quelconques de l'une des circonférences considérées, et A', B' deux points quelconques de l'autre; on aura

$$AA' \times BB' = AB' \times BA',$$

quel que soit le quadrilatère ABA'B', gauche ou plan. (G.)



1416. Soient

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = R,$$

et  $\alpha_{ik}$  le coefficient de  $a_{ik}$  dans  $R$ . Si l'on désigne par  $D$  le déterminant suivant,

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm a_{11} & a_{12} \pm a_{21} & \dots & a_{1n} \pm a_{n1} \\ a_{12} \pm a_{21} & a_{22} \pm a_{22} & \dots & a_{2n} \pm a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} \pm a_{n1} & a_{n2} \pm a_{2n} & \dots & a_{nn} \pm a_{nn} \end{vmatrix},$$

et par  $\Delta$  le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans  $D$  les quantités  $a_{ik}$  par  $\alpha_{ik}$ , on aura

$$\Delta = R^{n-2} D. \quad (\text{E. HUNYADY.})$$

1417. Le nombre  $p$  étant supposé *premier*, et les deux groupes

$$r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$$

et

$$s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$$

formant deux systèmes complets de résidus premiers par rapport au module  $p$ , il y a nécessairement deux indices différents  $i$  et  $k$ , tels que les produits  $r_i s_i$ , et  $r_k s_k$  sont *congrus* par rapport au module  $p$  <sup>(1)</sup>.

(A. HURWITZ, à Leipzig.)

(<sup>1</sup>) C'est-à-dire que la différence de ces deux produits est divisible par  $p$ .

---



---

**PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1);**

PAR M. A. MANNHEIM.

---

Je vais exposer d'une façon très sommaire les premiers éléments de la Géométrie descriptive, afin de faire connaître les changements que je propose dans le système d'enseignement depuis longtemps en usage.

Ces modifications, je l'espère, feront disparaître certaines difficultés qui arrêtent les commençants.

Elles permettront aussi de mieux préparer les élèves aux applications. Actuellement, en effet, pour résoudre les problèmes élémentaires, on emploie des solutions qui conduisent à des tracés simples, mais qui ne sont simples que grâce à la préparation des données.

Ces tracés d'ailleurs ne servent plus, lorsqu'on arrive aux applications. Il me paraît donc important, dès le début, de n'employer que les *solutions mêmes* qu'on retrouvera plus tard.

### **Lignes droites et plans en projections orthogonales.**

*Notions préliminaires.* — La projection d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Par rapport à ce plan, qu'on appelle *plan de projection*, cette perpendiculaire est appelée *projetante*. *Tous les points d'une projetante ont la même projection, et inversement un point du plan de projection correspond à une infinité de points de l'espace.*

La projection d'un point ne suffit donc pas pour définir

---

(1) Je rappelle que la publication de mon *Cours de Géométrie descriptive* remonte au mois de novembre 1881. (Ch. B.)

*Ann. de Mathémat.*, 3<sup>e</sup> série, t. I. (Septembre 1882.)

la position de ce point dans l'espace. Si l'on veut fixer la position d'un point par rapport à un plan horizontal de projection (que nous supposerons toujours au-dessous du point) on doit non seulement donner la projection de ce point, mais aussi sa hauteur au-dessus du plan de projection. Si cette hauteur est mesurée au moyen d'une échelle, elle est exprimée par un nombre qu'on appelle *cote*. Dans le cas où nous nous plaçons, c'est-à-dire lorsque le point est au-dessus du plan, cette cote porte le nom d'*altitude*.

La méthode de représentation des figures, dans laquelle les points sont représentés par leurs projections horizontales près desquelles on inscrit l'altitude, est désignée sous le nom de *méthode des projections cotées*.

La projection d'une ligne droite D sur un plan est le lieu des projections des points de D : c'est donc une ligne droite. Les projetantes des points de la droite D sont dans un même plan qu'on nomme *plan projetant* de la droite D. Toutes les droites de ce plan projetant, excepté les projetantes, ont pour projection une seule et même droite, qui représente aussi la projection du plan projetant; et inversement, une droite du plan de projection est la projection d'une infinité de droites de l'espace.

Pour fixer la position d'une droite, par rapport à un plan horizontal de projection, on peut donner les projections cotées de deux de ses points. C'est ainsi qu'on opère dans la méthode des projections cotées.

La projection d'une figure s'obtient au moyen des projections de ses différents points convenablement reliés par des lignes.

Les projections d'une figure sur des plans parallèles entre eux sont des figures que l'on peut faire coïncider en même temps que l'on amène en coïncidence les plans de projection qui les contiennent. Cette propriété est presque évidente; nous l'énoncerons ainsi :

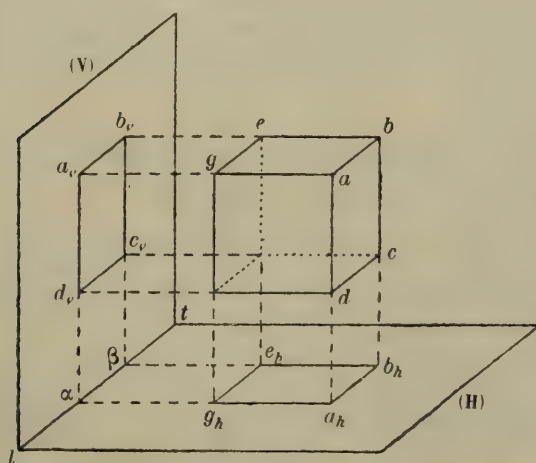
*La projection d'une figure sur un plan reste toujours la même à quelque distance qu'on transporte ce plan parallèlement à lui-même.*

# REPRÉSENTATION D'UN CORPS EN PROJECTIONS ORTHOGONALES.

Nous venons de voir qu'une seule projection ne suffit pas pour la représentation d'une figure et qu'il faut se donner en outre les hauteurs des différents points de cette figure au-dessus d'un même plan. Au lieu d'indiquer ces hauteurs au moyen de nombres indiquant des altitudes, on peut les donner graphiquement. C'est ainsi qu'on opère dans la *méthode des projections orthogonales*, dont nous allons maintenant parler.

Cherchons à représenter un cube placé de façon qu'une face soit horizontale. Prenons (*fig. 1*) un plan de pro-

Fig. 1.



jection horizontale (H) au-dessous du cube et un autre plan de projection (V) parallèle à l'une des faces verticales du cube.

Supposons que ces deux plans de projection, qui forment un angle dièdre droit, soient limités à leur



droite d'intersection  $lt$ , droite qu'on appelle *ligne de terre*. Le cube est dans l'intérieur de ce dièdre droit.

La projection du cube sur le plan horizontal (H) est le carré  $a_h b_h c_h g_h$  <sup>(1)</sup>, qu'on appelle la *projection horizontale* du cube.

Projetons le cube sur le plan de projection verticale (V), nous avons encore un carré :  $a_v b_v c_v d_v$ .

Le sommet  $a$  du cube a pour projection sur le plan horizontal (H) le point  $a_h$  et pour projection sur le plan vertical (V) le point  $a_v$ . On désigne un point de l'espace soit par une seule lettre sans indice, soit par ses deux projections : ainsi, lorsque l'on dit le point  $(a_h, a_v)$ , cela signifie le point dont les projections sont  $a_h$  et  $a_v$ .

La distance  $a_v z$  du point  $a_v$  à la ligne de terre est égale à la hauteur du point  $a$  au-dessus du plan (H). De même pour les autres sommets du cube dont les hauteurs au-dessus du plan (H) peuvent être mesurées par les distances, à la ligne de terre  $lt$ , des projections verticales de ces sommets. La projection verticale du cube donne donc graphiquement les hauteurs des différents sommets de ce corps.

Les deux projections du cube peuvent être tracées sur deux feuilles de dessin séparées.

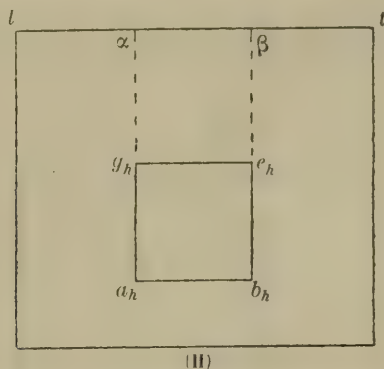
On voit (*fig. 2*) la projection horizontale  $a_h, b_h, c_h, g_h$  du cube sur le plan (H), et d'autre part (*fig. 2'*) la projection verticale  $a_v, b_v, c_v, d_v$  du cube sur le plan (V). On conçoit qu'on puisse fixer les positions des sommets du cube au-dessus du plan (H) en se servant des distances  $a_v z, b_v \beta, d_v z, c_v \beta$ , qui marquent graphiquement sur la projection verticale (V) les hauteurs des sommets du cube au-dessus du plan (H).

---

(1) L'indice  $h$  est employé pour la projection horizontale et l'indice  $v$  pour la projection verticale.

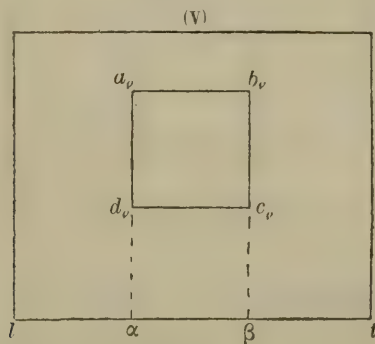
Pour rendre plus faciles les tracés qu'on peut avoir à faire au moyen des deux projections du corps représenté, on ne sépare pas ces deux projections : on les réunit sur une même feuille de dessin. Pour cela, il suffit de suppo-

Fig. 2.



ser qu'on ait ouvert le dièdre droit de la *fig. 1* en faisant tourner les faces de ce dièdre autour de *lt* jusqu'à ce qu'elles soient dans le prolongement l'une de l'autre. On

Fig. 2'.



arrive ainsi à la *fig. 3*, réunion des *fig. 2* et *2'* : c'est l'*épure* à l'aide de laquelle le cube est représenté.

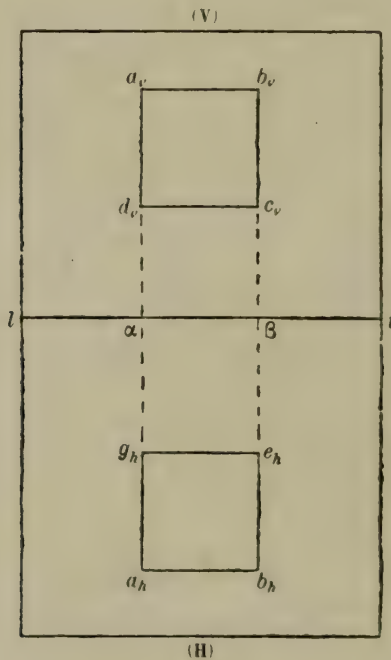
Le plan des projetantes  $aa_v$ ,  $aa_h$  étant perpendiculaire à chacun des plans de projection est perpendiculaire à *lt* <sup>(1)</sup>. Les droites  $a_v\alpha$  et  $a_h\alpha$  suivant lesquelles il

(<sup>1</sup>) Nous n'adoptons pas l'expression de *plan de profil* pour désigner un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

rencontre les plans de projection sont alors perpendiculaires à  $lt$  et, lorsque les plans (H) et (V) sont dans le prolongement l'un de l'autre, il en est de même des droites  $a_v\alpha$ ,  $a_h\alpha$ . On voit ainsi que *les deux projections  $a_v$ ,  $a_h$  d'un point  $a$  sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

On doit remarquer qu'un plan perpendiculaire aux

Fig. 3.



deux plans de projection est représenté sur chacun de ces plans par une droite perpendiculaire à la ligne de terre et qu'un plan parallèle à l'un des plans de projection se projette sur l'autre suivant une parallèle à la ligne de terre.

On appelle *plan de front* un plan parallèle au plan vertical de projection.

Nous n'avons parlé que des hauteurs des points au-dessus du plan (H); mais, pour fixer la position du cube,

on peut aussi employer le plan (V) et se servir des distances des sommets du cube à ce plan.

Ces distances ou *éloignements* sont donnés graphiquement sur le plan horizontal de projection. On peut donc dire : *pour restituer un corps dans l'espace, on peut employer l'un ou l'autre des plans de projection.*

Si, pour réunir les deux feuilles de dessin sur lesquelles se trouvent respectivement les projections du corps, on suppose que le dièdre formé par les plans de projection ait été ouvert de façon que le plan vertical soit placé dans le prolongement du plan horizontal de projection supposé fixe, on a en définitive l'épure faite sur une feuille de dessin horizontale. Dans cette hypothèse, on restitue le corps dans l'espace en élevant au-dessus de la feuille de dessin et à des hauteurs convenables les points marqués par leurs projections horizontales.

Si au contraire, pour obtenir les deux projections sur une même feuille de dessin, on suppose que c'est le plan horizontal de projection qui a tourné, l'épure est alors tracée sur une feuille verticale. On restitue alors le corps dans l'espace en éloignant du plan vertical de projection à des distances convenables les points marqués par leurs projections verticales.

Jusqu'à présent, sauf en quelques points, je n'ai fait que reproduire, en les modifiant un peu, les explications que l'on donne aux élèves qui commencent l'étude de la Géométrie descriptive.

Maintenant je vais m'écarter davantage de la route ordinairement suivie.

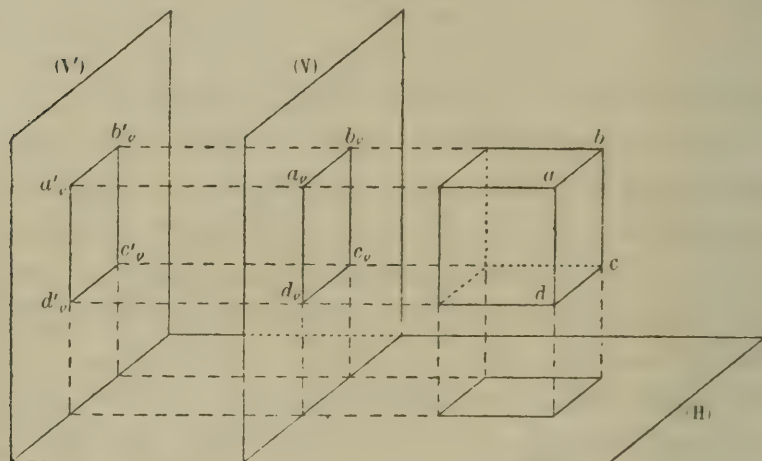
Éloignons le plan (V) parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il vienne prendre la position (V') (*fig. 4*).

La projection verticale du cube sur ce nouveau plan vertical est un carré  $a'_v b'_v c'_v d'_v$  égal au carré  $a_v b_v c_v d_v$ , comme nous l'avons déjà fait remarquer.



Après avoir ouvert le dièdre droit  $(H)$ ,  $(V')$  de manière à obtenir sur une même feuille horizontale les dessins des deux projections, nous avons une épure qui ne diffère

Fig. 4.



de la première, obtenue au moyen du dièdre droit  $(H)$ ,  $(V)$ , que par la distance plus grande qui sépare les deux projections du cube.

Au lieu de modifier la position de  $(V)$ , nous pouvons placer le plan  $(H)$  à une certaine distance au-dessous de la première position qu'il occupait.

Nous arrivons encore à une épure sur laquelle il y a toujours les deux mêmes carrés, projections du cube; seulement ces deux carrés sont plus ou moins éloignés l'un de l'autre.

Enfin nous avons encore le même résultat si nous éloignons à la fois les deux plans de projection.

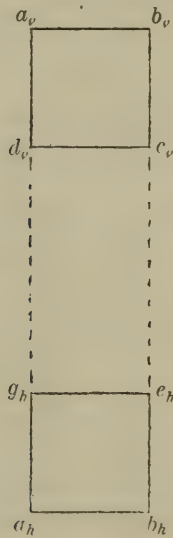
Nous voyons que, *quelles que soient les situations des plans de projection, pourvu que leurs directions ne changent pas, on est toujours amené à des épreuves qui ne diffèrent entre elles que par l'éloignement qui sépare les deux projections.*

Nous disons alors que *l'épure est toujours la même.*

car l'épure proprement dite ne se compose réellement que des deux parties du dessin relatives à la projection verticale et à la projection horizontale, indépendamment de la distance qui sépare ces projections. Puisque l'épure reste la même lorsqu'on éloigne les plans de projection, nous ne fixons pas la situation de ces plans. Nous la laissons indéterminée, mais nous éloignerons toujours les plans de projection, pour qu'il n'y ait pas de points derrière le plan vertical ni de points au-dessous du plan horizontal. Afin de bien marquer cette indétermination de la position des plans de projection, *nous ne tracerons pas de ligne de terre.*

L'épure à l'aide de laquelle le cube est représenté se

Fig. 5.



réduit alors à la *fig. 5* <sup>(1)</sup>. Nous avons sur cette épure

---

(<sup>1</sup>) Pour préciser, on devrait mettre deux lettres avec indices à chacun des sommets des carrés, puisque ces points sont chacun les projections de deux sommets.

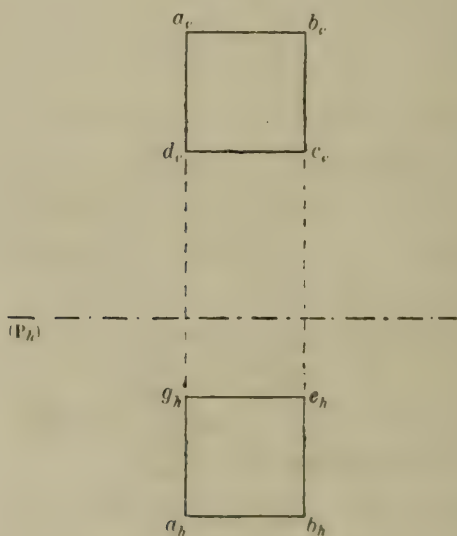
Dans la pratique, on ne met pas de lettres et l'on choisit les projections verticales, de façon qu'elles fassent images et qu'elles soient d'une lecture facile.

les deux carrés, projections du cube, et la direction des droites, telles que  $a_h a_v$ , qui réunit les deux projections d'un même point  $a$ . Nous donnons à cette direction le nom de *direction des projetantes*.

La droite  $a_h a_v$  considérée comme appartenant à la projection horizontale donne, en effet, la direction des projetantes perpendiculaires au plan vertical et la droite  $a_v a_h$ , considérée comme appartenant à la projection verticale, donne en même temps la direction des projetantes perpendiculaires au plan horizontal. D'après cela et ce que nous avons déjà dit, on voit qu'un *plan parallèle à l'un des plans de projection est représenté sur l'autre par une droite perpendiculaire à la direction des projetantes*.

Au moyen de l'épure de la *fig. 5*, il est facile de se

Fig. 6.



représenter le cube de l'espace. Pour cela prenons (*fig. 6*) une droite  $(P_h)$  tracée sur la projection horizontale perpendiculairement à la direction des projetantes et qui représente un plan de front. La feuille de l'épure étant

supposée placée verticalement, on opère alors en faisant usage de ce plan comme nous l'avons expliqué précédemment, en employant le plan vertical de projection.

Il me paraît utile de familiariser les élèves surtout avec l'emploi de la projection verticale pour restituer une figure de l'espace. C'est, en effet, la projection verticale qui montre le mieux l'apparence habituelle des objets. Ainsi, la projection verticale de la façade de l'Opéra montre bien ce monument, tandis que la projection horizontale ne fait pas image.

En disposant les plans de projections de façon que l'objet à représenter soit toujours au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical de projection, nous supprimons les difficultés que les élèves rencontrent pour la ponctuation des lignes supposées cachées par les plans de projection.

D'après ce que je viens d'expliquer, on voit que, si la feuille de dessin est assez grande, les projections d'un même corps sont absolument séparées; sinon il peut y avoir une région du papier renfermant à la fois une partie de la projection horizontale et une partie de la projection verticale; mais cela ne modifie en rien *ces projections, qui doivent toujours être considérées comme distinctes l'une de l'autre.*

Un corps n'a qu'une projection horizontale, mais il a une infinité de projections verticales. Lorsque l'on a les deux projections d'un corps, il est facile d'avoir une nouvelle projection verticale.

Prenons toujours comme exemple un cube donné (*fig. 7*) par ses deux projections disposées comme nous l'avons vu *fig. 5*.

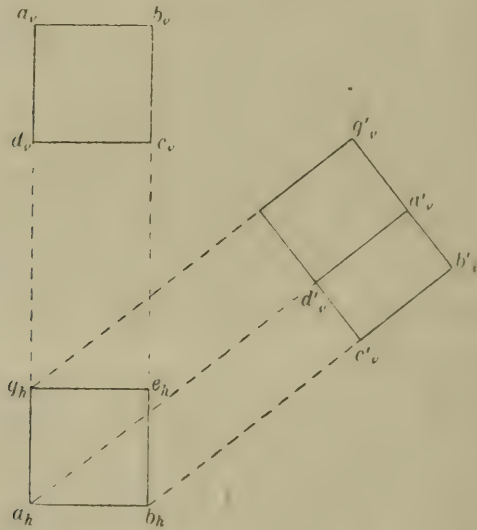
Par le point  $a_h$  traçons la droite  $a_h a'_v$  donnant la nouvelle direction des projetantes. Prenons le point  $a'_v$  comme nouvelle projection verticale du sommet  $a$  de



l'espace. La nouvelle projection du sommet  $d$  est, en  $d'_v$ , sur cette même droite  $a_h a'_v$ , à une distance du point  $a'_v$  égale au segment  $a_v d_v$  et portée dans le sens qu'on adopte comme étant celui qu'il faut suivre pour se rapprocher du plan horizontal de projection.

La face supérieure du cube étant horizontale se projette

Fig. 7.



verticalement suivant la droite  $g'_v b'_v$  menée par le point  $a'_v$  perpendiculairement à la direction des projetantes. De même pour la face inférieure. Il suffit, pour achever de déterminer la projection verticale du cube, de prendre les intersections de ces droites avec les parallèles à la direction des projetantes menées par les sommets du carré  $a_h b_h c_h g_h$ .

Le point  $a'_v$  a été pris arbitrairement sur la parallèle à la nouvelle direction des projetantes menée par le point  $a_h$ . Il faut pourtant choisir ce point de façon que la nouvelle projection verticale ne vienne pas se superposer sur la projection horizontale.

Telle est, en quelques mots, la modification principale que je propose. La suppression de la ligne de terre ne

complicque pas l'exposition des solutions des problèmes élémentaires, comme nous allons le voir. Mais, auparavant, je dois faire remarquer que, en proposant cette suppression, je ne fais qu'introduire dans les éléments un procédé en usage dans les applications.

Lorsque, par exemple, un charpentier veut établir le limon d'un escalier en bois, il représente la projection de ce limon sur une aire horizontale; puis, pour étudier l'assemblage qui relie deux parties de ce limon, il emploie une projection verticale qu'il trace aussi sur le sol. Il y a ainsi une projection verticale pour chacun des assemblages et *toutes ces projections verticales sont dessinées sans tenir compte des hauteurs auxquelles se trouvent les assemblages représentés.*

Si le charpentier avait cherché les projections verticales des assemblages en supposant les plans verticaux rabattus après avoir tourné autour de leurs traces sur le sol, il aurait obtenu des projections de plus en plus éloignées de la projection horizontale à mesure qu'il se serait occupé des assemblages plus élevés. Cette pratique aurait nécessité une très grande aire pour l'épure et aurait donné lieu à de longues lignes à tracer.

Ainsi, et je le répète encore, en proposant de supprimer la ligne de terre sur les épures, je demande simplement qu'on emploie dans les éléments le procédé qui est en usage dans les applications, procédé qui a, en outre, l'avantage de faire disparaître les difficultés concernant la ponctuation des lignes supposées cachées par les plans de projection.

#### PROBLÈMES DESCRIPTIFS.

L'illustre Poncelet a partagé les propriétés de l'étendue en deux classes : les propriétés descriptives et les pro-

priétés métriques, afin de distinguer celles dans lesquelles interviennent les grandeurs linéaires ou angulaires.

La propriété relative au carré de l'hypoténuse est une propriété *métrique*.

Lorsque deux triangles ont leurs sommets sur trois droites convergentes en un même point, leurs côtés correspondants se coupent en trois points en ligne droite. Voilà une propriété *descriptive*.

Nous emploierons encore les épithètes de *descriptifs* et de *métriques* pour distinguer deux genres de problèmes.

Les problèmes métriques sont ceux dans lesquels interviennent par leurs mesures, soit dans la solution, soit dans le résultat, les grandeurs linéaires ou angulaires. *Déterminer l'angle d'une droite et d'un plan* est un *problème métrique*.

*Construire le point où une droite rencontre un plan* est un *problème descriptif*.

Nous allons traiter certains problèmes descriptifs; mais auparavant disons quelques mots de la représentation d'une droite et de la représentation d'un plan.

Nous n'avons rien à ajouter à ce qui a déjà été dit relativement aux projections d'un point à propos de la représentation d'un cube. Dans le système que je propose, il n'y a plus à considérer les positions diverses d'un point par rapport aux plans de projection, ce qui était une première difficulté pour les élèves.

*Un point doit toujours être supposé au-dessus du plan horizontal de projection et en avant du plan vertical de projection.*

On appelle une *horizontale* une droite parallèle au plan horizontal de projection, et *droite de front* une droite qui est parallèle au plan vertical de projection.

Une droite est représentée par ses deux projections.

Elle est déterminée lorsqu'on donne les projections de deux de ses points.

Un plan peut être donné de plusieurs manières, soit au moyen de deux droites qui se coupent ou d'une droite et d'un point, etc.

On distingue sur un plan ses *horizontales* et ses *droites de front*.

On a appelé *traces* d'un plan les droites suivant lesquelles ce plan rencontre les plans de projection.

Nous n'aurons plus à chercher de traces de plan, puisque nous laissons les plans de projection dans une position indéterminée. Au lieu de construire des traces nous chercherons les horizontales et les droites de front des plans.

Comme on le fait d'habitude, nous emploierons indifféremment les mots *intersection* et *trace*. Ainsi nous dirons indifféremment la trace d'une droite sur un plan ou l'intersection d'une droite et d'un plan.

On ne doit pas oublier ce que nous avons déjà dit et que je répète. Pour simplifier le langage, en Géométrie descriptive, on désigne les points de l'espace en les indiquant soit par une lettre sans indice, soit par leurs projections. Ainsi, lorsque l'on dit le point  $(a_h, a_v)$ , il s'agit du point de l'espace dont les projections sont  $a_h$  et  $a_v$ .

Si l'on demande, comme nous allons le faire, de *déterminer la trace d'une droite sur un plan vertical*, il faut comprendre que ce dernier membre de phrase souligné équivaut à celui-ci : *Déterminer les projections de la trace d'une droite sur un plan vertical*.

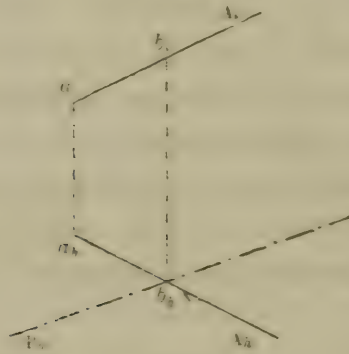
Comme la solution de ce problème est la même, qu'il s'agisse de l'un ou l'autre des plans de projection, nous l'énonçons ainsi :

*Déterminer la trace d'une droite sur un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.*



Le plan étant supposé perpendiculaire au plan horizontal de projection a pour projection horizontale (*fig. 8*) la droite  $(P_h)$ . Pour indiquer que cette droite représente un plan, nous la traçons avec des points et des traits et

Fig. 8.



nous employons la notation  $(P_h)$ , en ayant soin de mettre une parenthèse.

La droite  $A$  de l'espace est représentée par ses deux projections  $A_h$ ,  $A_v$ . Nous avons marqué sur la figure les deux projections  $a_h$ ,  $a_v$  d'un point de cette droite afin de donner la direction des projetantes.

Le plan qui projette horizontalement la droite  $A$  et le plan donné sont deux plans verticaux qui se coupent suivant une verticale projetée horizontalement au point  $b_h$  et verticalement suivant la parallèle à la direction des projetantes issues de  $b_h$ . Le point  $b_v$ , où cette droite rencontre  $A_v$ , est la projection verticale du point demandé. Les projections de la trace cherchée sont donc  $b_h$  et  $b_v$ .

On détermine de la même manière la trace d'une droite sur un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

( *A suivre.* )

# ÉQUATION EN $S$ DE DEGRÉ $m$ ET DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE EN CARRÉS :

PAR M. WALECKI.

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

Soient  $D_1$  un déterminant de degré  $m$ , à éléments réels, et symétrique;  $D$  ce qu'il devient quand on diminue d'une indéterminée  $S$  les éléments de la diagonale principale.

L'équation  $D = 0$  est en  $S$  de degré  $m$ .

Si  $D_1$  est le discriminant d'une fonction quadratique  $f(x, y, \dots, z)$  de  $m$  lettres,  $D$  est celui de

$$(1) \quad f(x, y, \dots, z) - S(x^2 + y^2 + \dots + z^2).$$

**THÉORÈME.** — *L'équation en  $S$  n'a pas de racine imaginaire.*

Pour une racine  $\alpha + \beta i$  de l'équation en  $S$ , la fonction (1) est décomposable en la somme des carrés des fonctions linéaires  $A + A'i, B + B'i, \dots, C + C'i$ , dont le nombre est moindre que  $m$ , et l'on a

$$\begin{aligned} f(x, y, \dots, z) - (\alpha + \beta i)(x^2 + y^2 + \dots + z^2) \\ \equiv (A + A'i)^2 + (B + B'i)^2 + \dots + (C + C'i)^2; \end{aligned}$$

les coefficients de  $i$  sont identiques : donc

$$-\beta(x^2 + y^2 + \dots + z^2) \equiv 2AA' + 2BB' + \dots + 2CC'.$$

Il existe des valeurs non toutes nulles et réelles des variables qui annulent les polynômes en nombre moindre  $A, B, \dots, C$ . Pour ces valeurs,  $x^2 + y^2 + \dots + z^2$  n'est pas nul. Il faut donc que  $\beta$  soit nul. C. Q. F. D.

On a supposé  $\alpha, \beta, A, B, C, A', B', \dots, C'$  réels <sup>(1)</sup>.

Une démonstration analogue montre que le discriminant de  $f(x, y, \dots, z) - Sf_1(x, y, \dots, z)$  ne s'annule que pour des valeurs réelles de  $S$ , pourvu que  $f$  et  $f_1$  soient à coefficients réels, et que l'un des deux soit décomposable en autant de carrés indépendants et tous positifs qu'il y a de variables.

*Condition pour que l'équation en  $S$  ait une racine double.* — La dérivée  $D'$  de  $D$ , prise par rapport à  $S$ , est la somme, changée de signe, des mineurs symétriques de degré  $m - 1$  que l'on peut former dans  $D$ ; on le voit en traitant  $D$  comme une fonction composée de  $m$  fonctions qui sont les éléments de la diagonale principale.

Pour arriver aux caractères d'une racine double, j'emploierai les propriétés suivantes des déterminants :

Soient  $D$  un déterminant;  $\Delta$  le déterminant adjoint, qui s'en déduit en substituant dans  $D$ , à chaque élément, son coefficient dans le développement de  $D$ .

Si  $D$  est symétrique,  $\Delta$  l'est aussi.

Si  $D$  est nul, les éléments d'une même ligne de  $\Delta$  sont un système de solutions pour les équations linéaires dont le déterminant est  $D$ .

*Si  $D$  est nul, tous les mineurs du second degré de  $\Delta$  sont nuls.*

Pour le démontrer, je considère les  $m$  équations linéaires dont le déterminant est  $D$ , supposé nul.

Le mineur principal est, ou de degré inférieur à  $m - 1$ , et alors tous les éléments de  $\Delta$  sont nuls, ou de degré  $m - 1$ . Dans ce cas, une seule inconnue peut être choisie

---

(1) J'ai introduit dans mon enseignement une démonstration de ce genre, pour l'équation en  $S$  ordinaire, avant les examens de 1881. W.

arbitrairement; deux systèmes de solutions sont composés de valeurs proportionnelles, et il en est ainsi pour deux lignes de  $\Delta$ .  
C. Q. F. D.

Je suppose maintenant  $D$  symétrique et à éléments réels.

*Si  $D$  est nul, les éléments non nuls de la diagonale principale sont de même signe dans  $\Delta$ .*

En effet, si j'appelle  $(r, s)$  l'élément de  $\Delta$  qui appartient à la  $r^{\text{ième}}$  ligne et à la  $s^{\text{ième}}$  colonne, on a, par l'énoncé précédent,

$$(2) \quad (r, r)(s, s) - (r, s)^2 = 0;$$

donc  $(r, r)$  et  $(s, s)$  sont de même signe, si aucun d'eux n'est nul.

*Si  $D$  est nul, ainsi que la somme des mineurs symétriques de degré  $m - 1$  dans  $D$ , tous les mineurs de degré  $m - 1$  sont nuls dans  $D$ .*

Les mineurs symétriques sont nuls; car, si certains ne l'étaient pas, comme ils sont des éléments  $(r, r)$  de l'adjoint  $\Delta$ , ils seraient de même signe, et leur somme non nulle.

Les mineurs non symétriques de degré  $m - 1$  sont nuls, car chacun d'eux est un élément  $(r, s)$  de l'adjoint, et, par ce qui précède, l'égalité (2) devient  $(r, s) = 0$ .

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit racine multiple de l'équation en  $S$  est que ce nombre annule  $D$  et tous ses mineurs de degré  $m - 1$ .*

La condition est suffisante, car une telle valeur annule  $D$  et  $D'$ .

La condition est nécessaire, car si  $S$  annule  $D$  et  $D'$ ,



pour cette valeur qui est réelle, le déterminant symétrique  $D$  et la somme  $D'$  des mineurs symétriques de degré  $m - 1$  étant nuls, tous les éléments de l'adjoint sont nuls.

C. Q. F. D.

Pour trouver les caractères d'une racine multiple d'ordre donné dans l'équation en  $S$ , j'emploierai les considérations suivantes.

Étant données  $p$  fonctions linéaires, homogènes et indépendantes, j'appelle *groupe de variables principales* un groupe de  $p$  variables dont les coefficients, dans ces fonctions, forment un déterminant non nul. Il peut y avoir plusieurs groupes de variables principales.

**THÉORÈME.** — *Si il existe deux groupes de variables principales présentant respectivement  $k$  lettres non communes, il en existe d'autres, dont on formera l'un en remplaçant, dans le premier,  $r$  lettres non communes, arbitrairement choisies, par  $r$  lettres convenablement choisies dans le second groupe, parmi les lettres non communes ( $k > 1$ ).*

Je le démontre d'abord pour  $r$  égal à 1.

Soient  $(x, y, \dots, z, u, \dots, v)$ ,  $(x', y', \dots, z', u, \dots, v')$  les deux groupes donnés. J'ordonne le déterminant du premier groupe suivant les éléments de la première colonne : les coefficients du développement ne sont pas tous nuls. Dans ce développement, je substitue aux éléments de la première colonne, successivement, les coefficients pris dans les  $p$  fonctions de  $u$ , puis des lettres communes jusqu'à  $v$  ; il est clair que les résultats sont nuls. Je substitue de même les coefficients des lettres  $x', \dots, z'$ . Si tous ces résultats étaient nuls, il y aurait une relation linéaire à coefficients non tous nuls, entre les coefficients pris dans les  $p$  fonctions, des lettres du second groupe, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

l'un des résultats est non nul ; je suppose que ce soit le premier : ce résultat est le déterminant du groupe

$$(x', y, \dots, z, u, \dots, v),$$

qui est donc principal.

C. Q. F. D.

Opérant sur  $y$  comme on a fait sur  $x$ , on passe de ce dernier à un groupe nouveau  $(x', y', \dots, z, u, \dots, v)$ , et ainsi de suite.

Dans l'ordre où l'on obtient ces groupes, deux consécutifs ont  $p - 1$  lettres communes ; les groupes extrêmes sont les groupes donnés.

*Si une fonction quadratique réelle de  $m$  variables est décomposable en  $p$  carrés indépendants, les mineurs non nuls, symétriques, de degré  $p$ , du discriminant de la fonction, sont tous de même signe.*

Un mineur symétrique de degré  $p$  du discriminant est le discriminant de la fonction où l'on annule toutes les variables, sauf  $p$  d'entre elles. Un tel discriminant partiel n'est non nul que si ces  $p$  variables sont des variables principales dans les  $p$  carrés. Les discriminants partiels répondant à deux groupes principaux qui diffèrent par une seule lettre sont de même signe, comme étant mineurs symétriques de degré  $p$  d'un déterminant symétrique, nul, de degré  $p + 1$ .

Deux discriminants partiels répondant à deux groupes principaux qui présentent  $p - k$  lettres communes sont les termes extrêmes d'une suite de  $k + 1$  discriminants partiels, correspondant aux groupes principaux donnés et aux groupes intermédiaires de variables principales, dont on a démontré l'existence. Deux discriminants partiels consécutifs sont de même signe dans cette suite ; donc aussi les extrêmes sont de même signe. C. Q. F. D.

*Si tous les mineurs symétriques du discriminant, de*

*degré supérieur à  $p$ , sont nuls, les mineurs non symétriques sont aussi nuls jusqu'à ce degré.*

Pour le prouver, je démontre que, si un mineur non symétrique de degré  $p$  est non nul, un mineur symétrique de degré égal ou supérieur à  $p$  est non nul.

En effet, si un mineur non symétrique de degré  $p$  est non nul, la fonction est décomposable en un nombre de carrés indépendants, égal ou supérieur à  $p$ , et un discriminant partiel de degré égal ou supérieur à  $p$  est différent de zéro.

C. Q. F. D.

*Si une fonction quadratique est décomposée en  $p$  carrés indépendants, la somme des discriminants partiels de degré  $p$  est non nulle.*

En effet, l'un au moins de ces discriminants n'est pas nul; d'ailleurs ceux qui sont non nuls sont de même signe : donc leur somme est différente de zéro.

*Si  $D$  est le discriminant d'une fonction quadratique de degré  $m$ ,  $\Sigma_{m-p}$  la somme des discriminants partiels de degré  $m-p$ , et que l'on ait  $D=0$ ,  $\Sigma_{m-1}=0$ , ...,  $\Sigma_{m-p+1}=0$ ,  $\Sigma_{m-p} \neq 0$ , la fonction est décomposable en  $m-p$  carrés indépendants.*

En effet, si le nombre des carrés était supérieur, et égal à  $m-p+1$ , par exemple,  $\Sigma_{m-p+1}$  ne serait pas nul, et si le nombre des carrés était moindre,  $\Sigma_{m-p}$  serait nul.

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit racine multiple d'ordre  $p$  de l'équation en  $S$  est que ce nombre annule  $D$  et tous ses mineurs de degré supérieur à  $m-p$ .*

En effet, la dérivée d'ordre  $p$  de  $D$  est

$$1.2.\dots p.(-1)^p \Sigma_{m-p}.$$

$\Sigma_{m-p}$  étant la somme des mineurs symétriques de degré  $m - p$ . Pour qu'un nombre annule la fonction  $D$  et ses  $p - 1$  premières dérivées, il faut que ce nombre annule  $D$ ,  $\Sigma_{m-1}$ ,  $\Sigma_{m-2}$ , ...,  $\Sigma_{m-p+1}$  et non  $\Sigma_{m-p}$ ; dès lors il annule tous les mineurs de  $D$  jusqu'au degré  $m - p + 1$  inclusivement. C. Q. F. D.

Pour cette valeur

$$(1) \quad f(x, y, \dots, z) = S(x^2 + y^2 + \dots + z^2)$$

est décomposable en  $m - p$  carrés indépendants.

*Deux racines distinctes de l'équation en  $S$  donnent pour la fonction (1) des décompositions d'espèce différente.*

Nous dirons, d'après M. Hermite, que deux décompositions sont de même espèce quand les carrés positifs  $y$  sont en même nombre, et aussi les carrés négatifs.

Je désigne par  $S_r$  une racine de l'équation en  $S$ , par  $P_r$ ,  $N_r$  les sommes des carrés positifs et négatifs de la décomposition correspondante, par  $p_r$ ,  $n_r$  les nombres respectifs de ces carrés, par  $k_r$  le degré de multiplicité de la racine : on a, par le théorème qui précède,

$$(3) \quad p_r + n_r = m - k_r.$$

Soient  $S_1, S_2, \dots, S_\nu$  les racines distinctes de l'équation en  $S$ , rangées par ordre de grandeur croissante. On a

$$f(x, y, \dots, z) - S_r(x^2 + y^2 + \dots + z^2) \equiv P_r - N_r,$$

$$f(x, y, \dots, z) - S_{r+1}(x^2 + y^2 + \dots + z^2) \equiv P_{r+1} - N_{r+1};$$

d'où, par soustraction,

$$(S_{r+1} - S_r)(x^2 + y^2 + \dots + z^2) \equiv P_r + N_{r+1} - P_{r+1} - N_r.$$

Comme il y a  $m$  carrés positifs dans le premier membre, il faut

$$(4) \quad p_r + n_{r+1} = m + \alpha,$$



$\alpha$  étant ou positif, ou nul; je retranche (3) et (4), il vient

$$(5) \quad n_{r+1} - n_r = \alpha + k_r;$$

donc les nombres  $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots, n_v$  vont en croissant et les décompositions sont d'espèces différentes.

*Le nombre des carrés négatifs d'une décomposition  $S_r$  est égal au nombre des racines inférieures à  $S_r$ ; c'est-à-dire que l'on a*

$$n_r = k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1}.$$

En effet, ajoutons les formules analogues à (5), il vient

$$n_v - n_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_{v-1} + A,$$

A étant ou positif ou nul; d'ailleurs on a

$$\begin{aligned} m - k_v &= n_v + p_v, \\ k_1 + k_2 + \dots + k_v &= m. \end{aligned}$$

J'ajoute ces trois dernières égalités, il vient

$$-n_1 = p_v + A;$$

d'où  $n_1, p_v$  et A sont nuls, puisqu'aucun n'est négatif, et les  $\alpha$  sont nuls dans les équations (5).

En résumé, une racine de l'équation en S donne autant de carrés négatifs qu'il y a de racines moindres, chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité.

Les nombres des carrés positifs et négatifs, ajoutés au degré de multiplicité de la racine, donnent le nombre des variables. La plus petite racine ne donne que des carrés positifs, la plus grande que des carrés négatifs.

*Nombre des carrés positifs ou négatifs de la décomposition de  $f(x, y, \dots, z)$ .*

Je traite  $f(x, y, \dots, z)$  comme une fonction dépendant de  $m + 1$  variables  $x, y, \dots, z, t$ ; et je forme l'équation en  $S$  qui est de degré  $m + 1$ . L'équation est la même que celle du  $m^{\text{ième}}$  degré obtenue en traitant  $f$  comme fonction de  $m$  variables, sauf introduction du facteur  $-S$ . La racine zéro ainsi introduite donne pour

$$f(x, y, \dots, z) - S(x^2 + y^2 + \dots + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire pour  $f(x, y, \dots, z)$ , une décomposition en carrés indépendants dont autant sont négatifs qu'il y a de racines négatives, autant sont positifs qu'il y a de racines positives.

*Nombre des carrés positifs ou négatifs de la décomposition de*

$$(6) \quad f(x, y, \dots, z) - \Sigma(x^2 + y^2 + \dots + z^2).$$

L'équation en  $S$  de cette nouvelle fonction admet pour racines les déterminations de  $S - \Sigma$ , quand on remplace dans cette différence  $S$  par toutes les racines de l'équation en  $S$  de la fonction  $f$ ; car, si pour  $f$  l'équation en  $S$  est  $\varphi(S) = 0$ , pour (6) elle est  $\varphi(S + \Sigma) = 0$ ; dans la décomposition de (6) il y a donc autant de carrés positifs que de racines supérieures à  $\Sigma$  dans l'équation  $\varphi(S)$ , et autant de carrés négatifs qu'il y a de racines moindres.

Cet énoncé comprend tous les précédents. Reste à déduire de l'équation en  $S$  la substitution linéaire orthogonale qui ramène la fonction quadratique à la forme canonique.

(*A suivre.*)

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE  
EN 1881;**

PAR M. H. LEZ.

1. On donne un cône de révolution, dont la génératrice SA fait avec l'axe SO un angle  $\beta$ , et une ellipse dont les demi-axes sont  $a$  et  $b$  :

1° Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue en coupant le cône par un plan convenablement déterminé;

2° Si AB est la trace du plan sécant sur le plan méridien ASB qui lui est perpendiculaire, démontrer la relation  $SA \cdot SB = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$ ;

3° Calculer en fonction des données  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$ , par des formules logarithmiques, l'angle SAB, la portion SA de la génératrice, ainsi que l'aire du triangle SAB.

Dans un cône droit circulaire, la section faite par un plan oblique, qui rencontre toutes les génératrices, est une ellipse.

En effet, les sphères ayant mêmes centres et mêmes rayons que les cercles inscrit et exinscrit au triangle SAB touchent le plan sécant AB en deux points F, F' également distants du milieu de la droite AB; de plus, la somme des distances d'un point quelconque P de la section aux deux points F, F' est constamment égale à  $MM' = AB = 2a$ .

1° Menant BD perpendiculaire à l'axe SO, on voit que l'angle  $ADB = 90^\circ - \beta$  et que

$$AD = AM - DM = (a + c) - (a - c) = 2c.$$





Connaissant les angles  $ADB = 90^\circ - \beta$ ,  $ABD = \varphi$ , on obtient facilement les angles DAB, SAB.

Quant à la surface du triangle SAB, elle est égale à  $\frac{SA \cdot SB \cdot \sin 2\beta}{2} = \frac{b^2}{\tan \beta}$ .

Reste maintenant à rendre l'expression de AS calculable par logarithmes.

Pour cela, écrivant

$$\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \beta} = a \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \beta} = a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = a \cos \varphi,$$

on a

$$\begin{aligned} AS &= \frac{a \cos \varphi - c \sin \beta}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \beta} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi \sin \beta}{\cos \beta} \right) \\ &= \frac{a \cos(\varphi + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \beta}. \end{aligned}$$

On trouverait de même

$$SB = \frac{a \cos(\varphi - \beta)}{\sin \beta \cos \beta}.$$

## 2. Résoudre l'équation

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c,$$

les lettres  $a, b, c, m$  désignant des nombres donnés dont le dernier est supérieur ou au moins égal à l'unité.

Condition de réalité des racines. Limites de  $c$ . — En faisant disparaître les radicaux dans l'une des deux égalités

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c, \quad \sqrt{mx + a} - \sqrt{x + b} = c,$$

on obtient le même résultat

$$\begin{aligned} (m-1)^2 x^2 - 2(1+m)c^2 x - 2(b-a)(m-1)x \\ = c^2(2a + 2b - c^2) - (a-b)^2. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation du second degré sont

$$x = \frac{c^2(1+m) + (b-a)(m-1) \pm 2c\sqrt{c^2m - (a-bm)(m-1)}}{(m-1)^2};$$

elles restent réelles si  $c^2m \geq (a-bm)(m-1)$ , condition assurément remplie quand  $c^2 \geq (a-bm)$ , et toujours si  $bm \geq a$ ,  $m$  étant plus grand que 1. Lorsque  $m=1$ , le premier et le troisième terme de l'équation réduite disparaissent, et l'on a  $x = \frac{(c^2 + b - a)^2 - 4bc^2}{4c^2}$ .

## ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1882).

### *Composition de Mathématiques (trois heures).*

1. Étant donnés un cercle de rayon  $r$  et un point  $A$  dans son plan, à une distance  $d$  du centre, on suppose menée par le point  $A$  une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné  $m^2$ .

Démontrer que, si  $\alpha$  désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point  $A$ , on aura la formule

$$(1) \quad \cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}.$$

*Discussion.* — Limites de  $m$ , quand on fait varier  $\alpha$ , le point  $A$  étant supposé à l'intérieur du cercle.

2. *Calcul logarithmique.* — La formule (1) étant admise, calculer l'angle  $\alpha$  à  $0'',1$  près, en supposant :

1° La distance  $d$  égale au plus grand segment du rayon

divisé en moyenne et extrême raison, et  $m$  égal au double de la moyenne proportionnelle entre  $r$  et  $d$ ;

$$2^{\circ} d = \frac{2}{3}r \quad \text{et} \quad m = d\sqrt{3}.$$

3. On connaît, dans un triangle ABC, deux côtés  $b, c$ , et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté  $a$ . Calculer ce côté  $a$  et l'angle A.

(On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et l'on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.)

*Épure (deux heures et demie).*

La base ABC d'une pyramide SABC est parallèle au plan horizontal de projection, au-dessus de ce plan et à une distance de  $0^m, 024$ . Le côté BC, parallèle à la ligne de terre, égale  $0^m, 113$  et est éloigné du plan vertical, en avant, de  $0^m, 015$ ; les côtés AC et AB valent respectivement  $0^m, 101$  et  $0^m, 076$ . Le triangle SAC est isocèle, les angles égaux SAC et SCA valent chacun  $62^{\circ}$ , enfin l'arête SB égale  $0^m, 112$ . On demande :

- 1<sup>o</sup> De construire les projections de la pyramide;
  - 2<sup>o</sup> De déterminer les projections du centre O de la sphère circonscrite à la pyramide;
  - 3<sup>o</sup> De déterminer les projections et la vraie grandeur de la section que fait dans la pyramide le plan mené par le point O parallèlement aux deux arêtes opposées AC et SB.
-

---

## CORRESPONDANCE.

---

1. *Extrait d'une Lettre de M. A. Causse, professeur au lycée d'Angers.* — «... O et O' étant les centres des cercles inscrit et exinscrit d'un triangle ABC, on a la relation

$$AB \times AC = AO \times AO',$$

par une simple similitude de deux triangles. »

2. Nous avons reçu de M. J. Thomas, maréchal des logis d'artillerie de marine à Saïgon, une solution bien exacte de la question 1358 déjà résolue (2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 379.)

---

## PUBLICATIONS ÉTRANGÈRES.

---

1. *AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS.* — Edited by J.-J. SYLVESTER. Published under the auspices of the Johns Hopkins University (<sup>1</sup>).

### *Volume IV.*

NUMBER 1. — *Contents* : On the 34 concomitants of the ternary cubic; by *Arthur Cayley*.

On certain expansion theorems; by *Emory Mc. Clintock*.

Some theorems in numbers; by *O.-H. Mitchell*.

---

(<sup>1</sup>) Baltimore : press of Isaac Friedenwald.

*Agents* : B. Westermann and Co. — D. Van Nostrand. — E. Steiger and Co. *New-York*. — Ferree and Co. *Philadelphia*. — Cushings and Bayley. *Baltimore*. — Trubner and Co. *London*. — Gauthier-Villars. *Paris*. — A. Asher and Co. *Berlin*. — Ulrico Hoepli. *Milan*.



Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers; by *Simon Newcomb*.

Tables on the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and Tables of the irreducible syzygies of certain quantics; by *J.-J. Sylvester*.

A demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of deg-order 10. 4; by *J.-J. Sylvester*.

Of the logic of number; by *C.-S. Peirce*.

On the remainder of Laplace's series; by *Emory Mc. Clintock*.

NUMBER 2. — *Contents*: Linear associative Algebra; by the late *Benjamin Peirce*. With Notes and additions; by *C.-S. Peirce*, son of the author.

NUMBER 3. — *Contents*: Linear associative Algebra; by the late *Benjamin Peirce*. With Notes and additions by *C.-S. Peirce*, son of the author (conclusion).

On Tchebycheff's theory of the totality of the prime numbers comprised within given limits; by *J.-J. Sylvester*.

Specimen of a literal Table for binary quantics, otherwise a partition table; by *Arthur Cayley*.

Note on Hansen's general formulæ for perturbations; by *G.-W. Hill*.

On the solution of a certain classe of difference or differential equations; by *J.-J. Sylvester*.

On the analytical forms called trees; by *Arthur Cayley*.

*Notes*: I. On symbols of operation; by *M. W. Crofton*.

II. On segments made on lines by curves; by *Miss. Christine Ladd*.

III. On the multiplication of the  $(n - 1)^{\text{th}}$  power of a symmetric determinant of the  $n^{\text{th}}$  order by the second power of any determinant of the same order; by *Thomas Muir*.

IV. On Newton's method of approximation; by *F. Franklin*.

Simple and uniform method of obtaining Taylor's, Cayley's and Lagrange's series; by *J.-C. Glashan*.

Forme of Rolle's theorem; by *J.-C. Glashan*.

2. BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE  
MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da *B. Boncompa-*

gni, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

### Tomo XIII, 1880.

GENNAIO-FEBBRAIO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. *Smeraldo Borghetti Lucchese*, Canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore. — *B. Boncompagni*.

MARZO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. *Smeraldo Borghetti Lucchese*, Canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni*.

APRILE. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. *Smeraldo Borghetti Lucchese*, Canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni*.

MAGGIO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. *Smeraldo Borghetti Lucchese*, Canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni*.

GIUGNO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. D. *Smeraldo Borghetti Lucchese*, Canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (fine). — *B. Boncompagni*.

Notizie di Libri relativi alle Matematiche, posseduti dalla Biblioteca Alessandrina, e non citati dal Conte *Giovanni Maria Mazzuchelli* nella parte stampata della sua Opera intitolata *Gli scrittori d'Italia*, ecc. — *E. Narducci*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

LUGLIO. — Notice sur les Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon; par *Maurice Steinschneider*. — Supplément au travail intitulé *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche*; par *C. Henry*.

AGOSTO. — Nuovo documento relativo alla invenzione dei cannocchiali binocoli, con illustrazioni, del prof. *Gilberto Gori*.

I precursori inglesi del Newton. Traduzione dall' inglese del prof. *Antonio Favaro*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SETTEMBRE. — Notice sur Nicolas Chuquet, et son « *Triparty en la science des nombres* ». — *Aristide Marre*.

Le *Triparty en la science des nombres*; par Maistre *Nicolas Chuquet*, Parisien; d'après le manuscrit *Fonds français*, n° 1346, de la Bibliothèque de Paris.

OTTOBRE. — Le *Triparty en la science des nombres*; par Maistre *Nicolas Chuquet*, Parisien; d'après le manuscrit *Fonds français*, n° 1346, de la Bibliothèque de Paris (continuazione.)

Annunzi di recenti pubblicazioni.

NOVEMBRE. — Le *Triparty en la science des nombres*, par Maistre *Nicolas Chuquet*, Parisien; d'après le manuscrit *Fonds français*, n° 1346, de la Bibliothèque nationale de Paris (continuazione.)

DICEMBRE. — Le *Triparty en la science des nombres*, par Maistre *Nicolas Chuquet*, Parisien; d'après le manuscrit *Fonds français*, n° 1346, de la Bibliothèque nationale de Paris (Fine.).

*Michele Chasles*. — *B. Boncompagni*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

3. *Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne; publié par *P. Mansion*, ancien élève de l'École Normale des sciences, professeur à l'Université de Gand; et par *J. Neuberg*, ancien élève de l'École Normale des Sciences, professeur à l'Athénée royal et à l'École des Mines de Liège.

Le journal paraîtra, vers le 15 de chaque mois, par livraison d'une feuille au moins, 16 pages grand in-8°. Prix de l'abonnement (frais de recouvrement compris). Pour la Belgique, 7<sup>fr</sup>, 50; pour l'étranger, 9<sup>fr</sup>.

On s'abonne à la librairie générale de Ad. Hoste, rue des Champs, n° 43. Gand.

Les articles destinés à la *Mathesis* doivent être adressés, franc de port, à M. *P. Mansion*, quai des Dominicains, 6, Gand; ou à M. *Neuberg*, rue de Selessin, n° 6, à Liège.

4. TIRAGES A PART. — *Sopra la proiezione cartografica isogonica*. Nota del Prof. *Matteo Fiorini* (estratta dalla serie IV, tomo III, delle *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, e letta nella sessione 4. maggio 1882. — Bologna, tipografia *Gambellini e Parmeggiani*, 1882.

*Sui sistemi variati di forze*. Nota del S. C. Prof. *C. Bardelli*, letta nell'adunanza del 9 marzo 1882, al R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Milano, tip. *Bernardoni di C. Rebeschini e C<sup>ia</sup>*. 1882.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1322

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 383);

PAR M. H.-J. KRANTZ, à Bréda.

*Démontrer que  $\sqrt{5}$  est la limite du rapport des deux séries*

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{8} - \frac{4}{21} + \frac{5}{55} - \frac{6}{144} + \dots$$

(ÉDOUARD LUCAS.)

En désignant, d'une manière générale, par  $Y_x$  et  $U_x$  les dénominateurs des termes des deux séries, on a, entre les dénominateurs de trois termes successifs, les relations

$$Y_{x+2} - 3Y_{x+1} + Y_x = 0,$$

$$U_{x+2} - 3U_{x+1} + U_x = 0.$$



On y satisfait par

$$Y_x = C_1 a^x + \frac{C_2}{a^x},$$

$$U_x = C'_1 a^x + \frac{C'_2}{a^x};$$

$a$  et  $\frac{1}{a}$  étant les racines de l'équation

$$(1) \quad p^2 - 3p + 1 = 0.$$

Les constantes sont déterminées par les conditions

$$C_1 a + \frac{C_2}{a} = 1, \quad C_1 a^2 + \frac{C_2}{a^2} = 2,$$

$$C'_1 a + \frac{C'_2}{a} = 1, \quad C'_1 a^2 + \frac{C'_2}{a^2} = 3;$$

d'où, en observant que  $a + \frac{1}{a} = 3$ ,

$$C_1 = \frac{C_2}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}a},$$

$$C'_1 = -C'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donc le terme général  $T_x$  de la première série devient

$$T_x = \frac{5a^{2x-1}}{(a^{2x-1} + 1)^2},$$

et le terme de la seconde série, suivant que  $x$  est un nombre impair ou pair,

$$T'_x = \pm \frac{x a^x \sqrt{5}}{a^{2x} - 1}.$$

On a donc, en désignant par  $S$  et  $S'$  les sommes des séries proposées,

$$S = 5a \left[ \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a^3+1)^2} + \frac{a^4}{(a^5+1)^2} + \dots \right],$$

$$S' = a\sqrt{5} \left( \frac{1}{a^2-1} - \frac{2a}{a^4-1} + \frac{3a^2}{a^6-1} - \dots \right).$$

En prenant pour  $a$  la racine de l'équation (1), qui est plus grande que l'unité, on peut développer tous les termes de  $S'$  en séries convergentes. De cette manière, on trouve

$$S' = a\sqrt{5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \dots \\ - \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^7} - \frac{2}{a^{11}} - \frac{2}{a^{15}} - \dots \\ + \frac{3}{a^4} + \frac{3}{a^{10}} + \frac{3}{a^{16}} + \frac{3}{a^{22}} + \dots \\ - \frac{4}{a^5} - \frac{4}{a^{13}} - \frac{4}{a^{21}} - \frac{4}{a^{29}} + \dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}.$$

Maintenant, on peut aisément ajouter tous les termes de  $S'$  qui sont placés dans une même ligne verticale, et de cette manière on retrouve les termes successifs de  $S$ , que nous avons mis entre les crochets.

On a, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} - \frac{4}{a^5} + \dots &= \frac{1}{(a+1)^2}, \\ \frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^7} + \frac{3}{a^{10}} - \frac{4}{a^{13}} + \dots &= \frac{a^2}{(a^3+1)^2}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

de sorte que l'on a enfin

$$\frac{S}{S'} = \sqrt{5}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et de Virieu.

## Question 1369

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 382);

PAR M. MORET-BLANC.

Par le centre d'un ellipsoïde, on mène trois plans rectangulaires quelconques A, B, C; si l'on nomme  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les angles que forment ces plans avec un plan diamétral fixe P;  $a$ ,  $b$  les axes de la section de la surface par le plan P;  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  les demi-diamètres de cette section dirigés suivant les droites (A, P), (B, P), (C, P), on aura

$$\frac{\sin^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b_1^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

(GENTY.)

Prenons les axes de la section diamétrale P pour axes des  $x$  et des  $y$ , et la perpendiculaire à ces axes menée par le centre O de l'ellipsoïde pour axe des  $z$ . L'équation de la section diamétrale (P) sera

$$(1) \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Soient

$$(A) \quad mx + ny + z \cos \alpha = 0,$$

$$(B) \quad m_1 x + n_1 y + z \cos \beta = 0,$$

$$(C) \quad m_2 x + n_2 y + z \cos \gamma = 0$$

les équations des trois plans A, B, C, avec les relations

$$m^2 + n^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 1,$$

$$m_1^2 + n_1^2 + \cos^2 \beta = 1, \quad n^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1,$$

$$m_2^2 + n_2^2 + \cos^2 \gamma = 1, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

d'où

$$\sin^2 \alpha = m^2 + n^2,$$

$$\sin^2 \beta = m_1^2 + n_1^2,$$

$$\sin^2 \gamma = m_2^2 + n_2^2,$$

résultant de ce que les trois plans A, B, C, ainsi que les plans de coordonnées, sont rectangulaires.

Les coordonnées  $x_1, y_1$  de l'extrémité du demi-diamètre  $a_1$  sont déterminées par les deux équations

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

$$m x + n y = 0;$$

on en tire

$$x_1^2 = \frac{a^2 b^2 n^2}{a^2 m^2 + b^2 n^2}, \quad y_1^2 = \frac{a^2 b^2 m^2}{a^2 m^2 + b^2 n^2},$$

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2 b^2 (m^2 + n^2)}{a^2 m^2 + b^2 n^2} = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{a^2 m^2 + b^2 n^2},$$

d'où

$$\frac{\sin^2 \alpha}{a_1^2} = \frac{a^2 m^2 + b^2 n^2}{a^2 b^2};$$

de même,

$$\frac{\sin^2 \beta}{b_1^2} = \frac{a^2 m_1^2 + b^2 n_1^2}{a^2 b^2},$$

$$\frac{\sin^2 \gamma}{c_1^2} = \frac{a^2 m_2^2 + b^2 n_2^2}{a^2 b^2}.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et ayant égard aux relations

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 1,$$

$$n^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1,$$

il vient

$$\frac{\sin^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b_1^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c_1^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

C. Q. F. D.



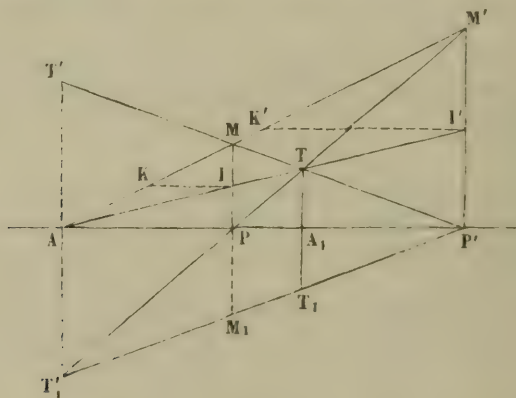
## Question 1370

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 383 );

PAR M. N. GOFFART.

Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes  $AA_1$  et  $BB_1$ ; par l'un des sommets réels  $A$  passe une sécante  $AMM'$ , et les tangentes en  $M$  et  $M'$  se rencontrent en  $T$ : on demande de construire les deux courbes connaissant les points  $A$ ,  $M$ ,  $T$ . (LAISANT.)

Les courbes données sont les coniques supplémentaires de Poncelet. Rappelons leurs propriétés. Les courbes étant rapportées à leurs axes, la droite  $AMM'$



coupe les courbes en des points  $M$ ,  $M'$  dont les abscisses sont liées par la relation

$$xx' = a^2.$$

En conséquence, si  $P$  et  $P'$  sont les pieds des ordonnées des points  $M$  et  $M'$ , il en résulte que  $MP'$  et  $M'P$  sont respectivement les tangentes en  $M$  et  $M'$  à l'ellipse et à l'hyperbole, respectivement. Le lieu des points de concours  $T$  de ces tangentes est la tangente commune au sommet  $A_1$ ; de même que la tangente au sommet  $A$  est le lieu des points de concours de l'une des tangentes et de la symétrique de l'autre sur l'axe.

Telles sont les propriétés connues, qu'on vérifie du reste aisément sur les équations <sup>(1)</sup>. Il en résulte que A étant milieu de T'T', I et I' sont respectivement les milieux de MP et de M'P'. Donc, si par ces points on mène des parallèles à l'axe AA<sub>1</sub>, les points K et K' seront les milieux de AM et de AM', en même temps que les angles MIK et M'I'K' seront droits. En résumé, lorsqu'on donne A, T et M ou A, T et M', on trouve I ou I', par l'intersection de AT avec la circonférence décrite sur KM ou sur K'M' comme diamètre. Le point I ou I' détermine le point P ou P', et, par suite, la direction AP ou AP' de l'axe. Le second sommet A<sub>1</sub> résulte de l'intersection de cette droite AP ou AP' avec la circonférence décrite sur AT comme diamètre. L'une ou l'autre courbe est donc définie élémentairement par l'axe et une tangente avec son point de contact.

Il y a, en général, deux points I ou deux solutions,

(<sup>1</sup>) D'après une proposition bien connue, on a, en désignant par  $2a$  et  $2b$  les axes de l'ellipse,  $\frac{MP^2}{AP \cdot A_1P} = \frac{b^2}{a^2}$ . L'hyperbole ayant les mêmes axes  $2a$ ,  $2b$  que l'ellipse, on a aussi

$$\frac{M'P'^2}{AP' \cdot A_1P'} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{MP^2}{M'P'^2} = \frac{AP}{AP'} \cdot \frac{A_1P}{A_1P'},$$

et, parce que  $\frac{MP}{M'P'} = \frac{AP}{AP'}$ , il vient  $\frac{AP}{AP'} = \frac{A_1P}{A_1P'}$ ;

donc les quatre points A, A<sub>1</sub>, P, P' sont conjugués harmoniques, et par conséquent les droites MP' et M'P sont respectivement tangentes en M et M' à l'ellipse et à l'hyperbole.

D'autre part, on sait que la droite TA, menée du point d'intersection T des diagonales d'un trapèze MPP'M' au point de rencontre A des côtés non parallèles, passe par les milieux I, I' des deux bases, et qu'en outre les quatre points A, T, I, I' sont, comme A, A<sub>1</sub>, P, P', conjugués harmoniques; il en résulte évidemment que la droite TA<sub>1</sub> est parallèle aux bases du trapèze, et, par suite, perpendiculaire à l'axe AA<sub>1</sub> au sommet A<sub>1</sub>. (G.)

( 426 )

et le problème n'est possible que si

$$\frac{3}{4} AM \sin TAM \leq \frac{1}{4} AM \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} AM \sin$$

c'est-à-dire

$$\sin(TAM \text{ ou } TAM') \leq$$

*Note.* — La même question a été résolue par Blanc.

---

### Question 1378

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 527 );

PAR M. S. RÉALIS.

#### *L'équation*

$$x^4 + 12\alpha\beta(x + \beta)x + 2\alpha\beta(4x^2 - 9)$$

*dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers d  
n'a pas de racine entière.*

L'équation proposée peut s'écrire

$$(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = [x^2 + 2(\alpha + \beta)x +$$

où l'on voit, d'après un théorème connu  
être vérifiée par des valeurs entières d

*Note.* — La même question a été résolue par Blanc ; Henri Cartier.

---

### Question 1381

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 527 );

corde quelconque  $MN$ , et du point  $A$  les droites  $AM$ ,  $AN$  qui coupent, respectivement, la circonférence en  $P$  et  $Q$ . Démontrer que :

1° La droite  $PQ$  rencontre  $AB$  en un point fixe lorsque la sécante  $BMN$  tourne autour du point  $B$ .

2° Le lieu géométrique du point d'intersection des droites  $PQ$  et  $AB$ , lorsque les droites  $AM$ ,  $AN$  sont perpendiculaires menées aux droites  $AM$ ,  $AN$ , est une droite perpendiculaire à  $AB$ .

( DOMENICO MONTESANO )

1° Prolongeons les droites  $PQ$  et  $MN$  jusqu'à leur intersection en  $C$  (1), et dans le quadrilatère inscrit  $AMCN$  menons les diagonales  $PN$ ,  $QM$  qui se coupent au point  $D$ . La droite  $CD$  est la polaire du point  $A$  par rapport à la circonférence considérée. Donc  $CD$  est une droite fixe qui rencontre  $AB$  en un point fixe  $E$ , quelle que soit la direction de la sécante  $BMN$ .

La droite  $CD$  est aussi la polaire du point  $A$ , par rapport à l'angle  $MCP$ ; donc, en désignant par  $i$  le point d'intersection des droites  $CP$  et  $AB$ , les points  $B$  et  $E$  sont conjugués harmoniques de  $A$  et  $i$ ; mais les trois points  $A$ ,  $B$ ,  $E$  sont fixes; par conséquent, il en est de même du point  $i$  de rencontre des droites  $PQ$  et  $AB$ .

*Nota.* — Cette première partie de la question est d'ailleurs une conséquence de cette proposition générale :

*Si un quadrilatère inscrit dans une conique se déplace de telle manière que trois de ses côtés tournent*



points viennent se confondre en un seul; on le démontrerait comme précédemment.

2° Soit J le point d'intersection des perpendiculaires menées aux droites AM, AN, aux points M, N. Les quatre points A, M, N, J appartiennent à la circonférence, qui a AJ pour diamètre. Cette circonférence coupe la droite AB en un point K déterminé par l'égalité

$$BK \times BA = BM \times BN :$$

donc le point K est fixe sur la droite AB, et le lieu du point J est la perpendiculaire menée à AB au point K.

*Nota.* — La même question a été résolue par MM. J. Pisani ; Moret-Blanc ; Borletti ; P., au lycée de Toulouse ; Domenico Montesano.

### Question 1383

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 528) ;

PAR M. LEZ.

*On donne sur un plan une circonférence de centre O et un point fixe C.*

*On prend un triangle rectangle ACB dont le sommet de l'angle droit est en C et dont l'hypoténuse est tangente en A à la circonférence donnée. On abaisse du sommet une perpendiculaire sur AB; cette perpendiculaire rencontre AB au point H, et elle rencontre en I la perpendiculaire abaissée de B sur OC. Démontrer que, quelle que soit la position de ACB, la quantité  $\frac{1}{CH} \pm \frac{1}{CI}$  est constante. On prend le signe — lorsque H et I sont d'un même côté par rapport à C.*

(MANNHEIM.)

Soit D le point où l'hypoténuse AB rencontre la ligne qui joint le centre O au point C <sup>(1)</sup>; les droites OA, CH étant perpendiculaires à AB, les triangles ODA, CDH sont semblables, et l'on a

$$(1) \quad \frac{1}{CH} = \frac{AD}{OA \cdot HD}.$$

La droite DI étant une des hauteurs du triangle, BDC est perpendiculaire à BC et parallèle à AC; par suite, les triangles semblables DHI, AHC fournissent la proportion

$$(2) \quad \frac{HA}{HD} = \frac{HC}{HI}.$$

Quelle que soit donc la position du point C par rapport à la circonférence O, le point D détermine sur AH, comme le point I sur CH, deux segments additifs ou soustractifs.

En effet, la proportion (2) donne

$$\frac{HA}{HD \pm HA} = \frac{HC}{HI \pm HC} \quad \text{ou} \quad \frac{HA}{AD} = \frac{HC}{CI};$$

mais, à cause de l'égalité (1), on a

$$\frac{1}{CI} = \frac{HA}{HC \cdot AD} = \frac{HA}{OA \cdot HD}.$$

Par suite, suivant que  $HD = AD \pm HA$ , la somme ou la différence des inverses  $\frac{1}{CH}$ ,  $\frac{1}{CI}$  est constante et égale à l'inverse du rayon  $\frac{1}{OA}$ .

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Quand  $HD = AD + HA$ , le sommet  $C$  est évidemment entre  $H$  et  $I$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Pisani; Moret-Blanc; N. Goffart; Victor Strékalof; Domenico Montesano; Paul Boulogne, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas).

### Question 1400

(voir page 239).

PAR M. MORET-BLANC.

*On donne un triangle  $ABC$ , et un point quelconque  $O$ . On prend les symétriques  $a, b, c$  de ce point par rapport aux milieux de  $BC, AC, AB$ . Démontrer : 1° que les droites  $Aa, Bb, Cc$  concourent en un même point  $P$ ; 2° que la droite  $OP$  tourne autour d'un point fixe  $E$  lorsque le point  $O$  se meut d'une manière quelconque; 3° que le point  $E$  divise  $OP$  dans un rapport constant.*  
(D'OCAGNE.)

1° Soient  $A_1, B_1, C_1$  les milieux des côtés  $BC, AC, AB$ .

D'après la construction la droite  $ab$  est parallèle à  $(A_1 B_1)$  et égale à  $2 A_1 B_1$ ; elle est donc égale et parallèle à  $AB$ , mais de sens contraire.

De même  $ac$  et  $bc$  sont respectivement égales, parallèles et de sens contraire à  $AC$  et  $BC$ . Les trois couples de parallèles  $AB$  et  $ab$ ,  $AC$  et  $ac$ ,  $BC$  et  $bc$  forment trois parallélogrammes dont les diagonales  $Aa, Bb, Cc$  se coupent en un point  $P$  milieu de chacune d'elles.

2° La ligne  $OP$ , médiane du triangle  $OAA_1$ , coupe la médiane  $AA_1$  aux deux tiers de sa longueur à partir du point  $A$ ; donc elle passe par le point fixe  $E$ , point de concours des médianes du triangle  $ABC$ ;

3° Elle est divisée par ce point en deux segments dont le rapport  $\frac{OE}{EP} = \frac{2}{1}$ .

*Remarque.* — Le point O peut être situé d'une manière quelconque dans l'espace.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Ahetroë, et Odille Tors, au lycée de Nancy.

M. le colonel A. Mathieu en a donné une solution analytique très simple, au moyen des coordonnées trilinéaires.

## QUESTIONS.

1418. On donne une ellipse de demi-axes OA, OB et deux circonférences concentriques à l'ellipse, et de rayons  $r$ ,  $R$ ;  $r = OB$ . Une droite, issue du centre O commun aux trois courbes, coupe les circonférences  $r$ ,  $R$  en des points C, D par lesquels on mène des parallèles à OA dirigées dans le sens OA. La première rencontre l'ellipse au point E, la seconde est rencontrée en un point F, par la normale à l'ellipse en E; trouver le lieu géométrique du point F.

(ERNEST LEBON.)

1419. Un triangle ABC étant donné, on mène d'un point P aux côtés BC, CA, AB des parallèles qui rencontrent, respectivement, AB, BC, CA en A', B', C'.

1° Pour que les trois points A', B', C' soient en ligne droite, il faut que P se trouve sur une conique déterminée.

2° A un point P de cette conique correspondent deux droites A' B' C'; quel est le lieu de leur point de rencontre quand le point P parcourt la conique?

Cas particulier du triangle ABC équilatéral.

(POUJADE.)



1420. Trouver la valeur des intégrales

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{x[nx - (n+1)]\sqrt{R}},$$

dans lesquelles R désigne le polynôme

$$nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1.$$

(S. RÉALIS.)

1421. Soient AOD, BOE, COF les trois hauteurs, et G le centre de gravité d'un triangle ABC; démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AGD, BGE, CGF se coupent en un second point qui est l'intersection de la droite OG, et de l'axe radical du cercle circonscrit au triangle ABC, et du cercle des neuf points de ce triangle.

(REV. G. RICHARDSON, M.-A; extrait de : *The educational Times*, august 1, 1882.)

1422. Tout nombre dont le carré se compose des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers dont deux, au moins, sont consécutifs.

Exemples :

$$169^2 = 119^2 + 120^2, \quad \text{et} \quad 169 = 3^2 + 4^2 + 12^2,$$

$$29^2 = 20^2 + 21^2, \quad \text{et} \quad 29 = 2^2 + 3^2 + 4^2.$$

(G.)

*Note.* — M. Adr. Pallaz, élève de l'École Polytechnique de Zurich, a résolu la question 1377; sa solution est arrivée trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro d'août.

#### ERRATUM

Page 321, ligne 2 en remontant : *au lieu de* point C, D, si l'on... *lisez* : point, si l'on... Il faut y supprimer les lettres C, D.

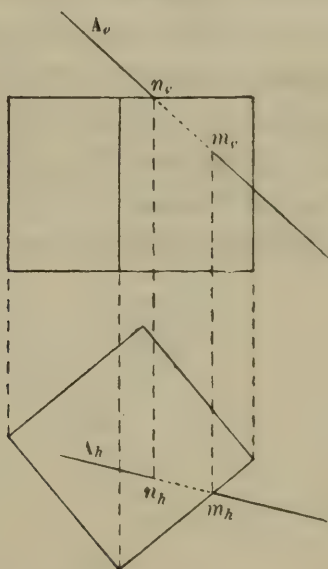
## PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR M. A. MANNHEIM.

[ SUITE ( <sup>1</sup> ) ].

Afin de préparer les élèves aux applications et les obliger à lire dans l'espace, il nous paraît utile de placer immédiatement après les problèmes théoriques des

Fig. 9.



problèmes d'application dans lesquels les plans sont les faces d'un corps solide.

Par exemple, le problème précédent peut être complété par le suivant.

APPLICATION. — *Un cube dont une face est horizontale est traversé par une droite. On demande de*

( <sup>1</sup> ) Même Tome, p. 385.

*représenter les portions de cette droite qui sont extérieures au cube.*

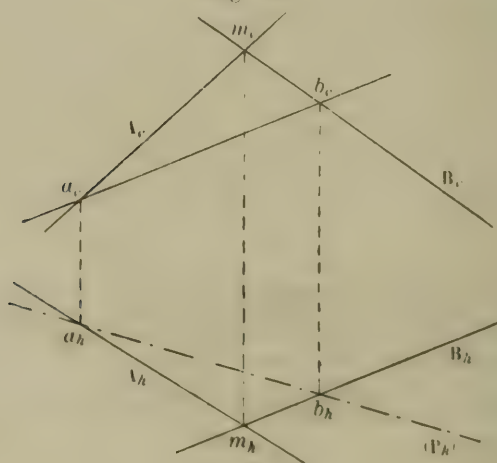
En appliquant la solution du problème théorique, on arrive tout de suite à la solution de celui-ci, comme on le voit sur la *fig. 9*. Le segment caché, figuré par des points, est compris entre les points  $(m_h, m_v), (n_h, n_v)$ .

*Déterminer l'intersection de deux plans dont l'un est quelconque et l'autre perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Le plan arbitraire est donné par deux droites A, B qui se coupent; on a (*fig. 10*) les projections de ces droites. L'autre plan, supposé perpendiculaire au plan horizontal de projection, est projeté suivant  $(P_h)$ .

En appliquant la solution du problème précédent, nous avons tout de suite le point  $(a_h, a_v)$  où la droite A perce le plan vertical donné. De même, pour la droite B,

Fig. 10.



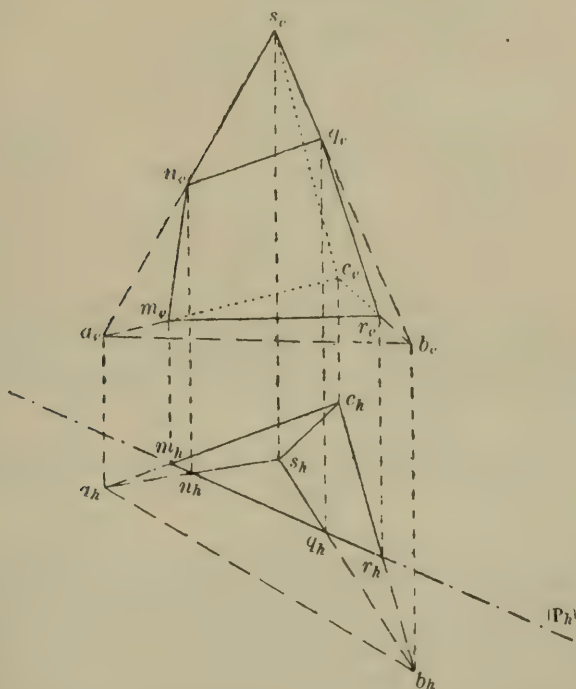
on a le point  $(b_h, b_v)$ . La droite cherchée, qui est une ligne de front du plan des deux droites A et B, est alors en projection verticale  $a_v b_v$ .

APPLICATION. — On donne un tétraèdre, on enlève

la portion de ce solide qui est en avant d'un plan vertical donné. On demande la représentation du solide restant.

Les sommets du tétraèdre sont dans l'espace  $s, a, b, c$ .  
Le plan sécant vertical est représenté (fig. 11) par la

Fig. 11.



droite  $(P_h)$ . En appliquant la solution précédente, on a tout de suite le solide représenté sur la figure.

*Déterminer une droite de front d'un plan lorsque celui-ci est donné par une droite et un point. — Soient  $(A_h, A_v)$  (fig. 12) la droite donnée et  $(m_h, m_v)$  le point donné. Par le point  $m_h$  menons une perpendiculaire à la direction des projetantes.*

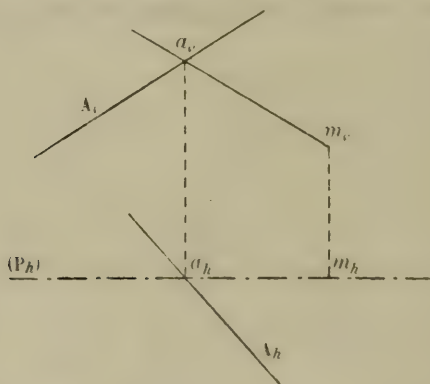
Cette droite  $(P_h)$  représente un plan de front.

Ce plan coupe le plan qui projette horizontalement la



droite  $A$  suivant une verticale dont la projection horizontale est le point  $a_h$ . En menant de ce point une parallèle à la direction des projetantes, on obtient la projection verticale de cette droite. Cette projection ren-

Fig. 12.



contre  $A_v$  au point  $a_v$  qu'il suffit de joindre au point  $m_v$  pour avoir la projection verticale de la droite de front demandée.

De la même manière on détermine une horizontale du plan.

*Déterminer le point où une droite donnée rencontre un plan quelconque.* — D'une manière générale, on résout ce problème en menant par la droite donnée un plan arbitraire. On prend l'intersection de ce plan et du plan donné : la droite, ainsi déterminée, rencontre la droite donnée au point demandé.

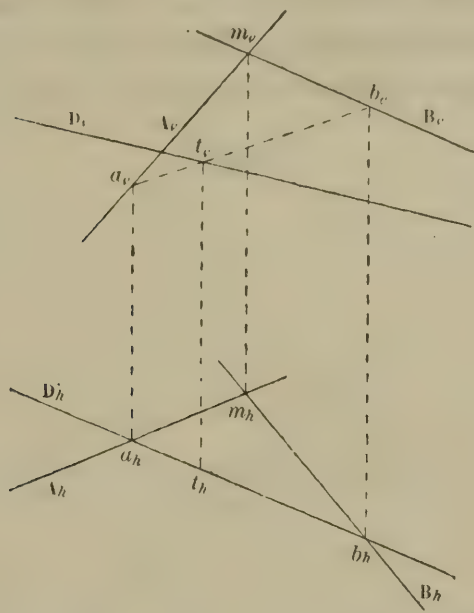
Nous allons prendre le cas particulier où le plan auxiliaire est le plan qui projette horizontalement la droite donnée.

Soient représentées (fig. 13) les projections des deux droites  $A$  et  $B$  qui déterminent le plan donné, et les projections de la droite donnée  $D$ .

Considérons la droite  $D_h$  comme la projection d'un plan vertical. Ce plan coupe la droite  $A$  au point  $(a_h, a_v)$

et la droite B au point  $(b_h, b_v)$ . Il coupe donc le plan donné suivant une droite dont la projection verticale est  $a_v b_v$ . Le point  $t_v$  où cette droite rencontre  $D_v$  est la projection verticale du point cherché.

Fig. 13.



On a alors tout de suite la projection horizontale  $t_h$  de ce point.

Nous n'avons pas indiqué que la droite donnée est cachée par le plan à partir du point où elle le rencontre, parce que dans un problème théorique il n'y a pas lieu de faire la distinction entre les parties vues et les parties cachées, à moins que l'on n'indique de quel côté du plan se trouve le solide dont il est une des faces.

Aussi, en admettant cette manière de faire, est-il indispensable d'ajouter une application.

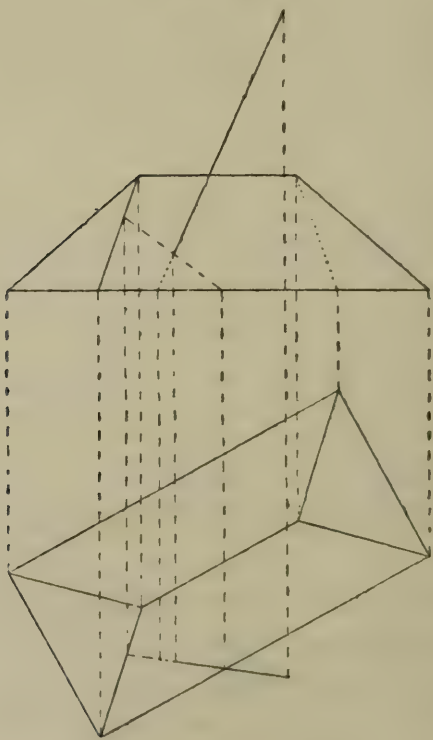
APPLICATION. — Une perche pénètre dans un tas de sable placé obliquement; déterminer le point où elle

*rencontre l'une des faces de ce tas de sable et figurer la partie cachée de cette perche.*

Il suffit de regarder la *fig. 14* pour comprendre la solution de ce problème.

*Déterminer l'intersection de deux plans qui sont respectivement donnés par leurs traces sur un plan de front et leurs traces sur un plan horizontal. — Soient*

Fig. 14.



$A_v$  et  $B_v$  les traces des plans donnés sur le plan de front ( $P_h$ ), et  $C_h$ ,  $D_h$  leurs traces sur le plan horizontal ( $Q_v$ ).

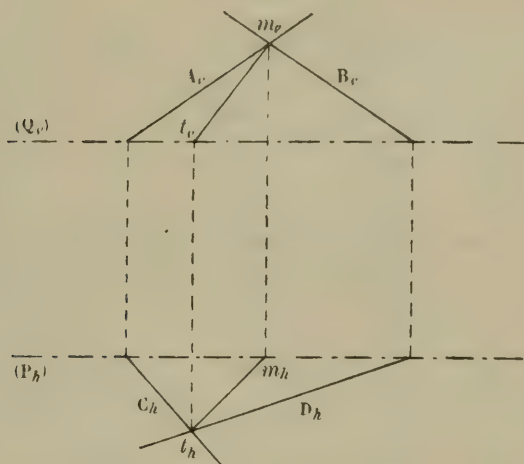
Le point  $m_v$  où se rencontrent  $A_v$ ,  $B_v$  appartient à l'intersection cherchée.

La projection horizontale de ce point est en  $m_h$  sur ( $P_h$ ); joignons ce point au point de rencontre  $t_h$  des

droites  $C_h$ ,  $D_h$  et nous avons la projection horizontale de l'intersection demandée. La projection verticale de cette droite est  $m_v t_v$ .

Cette solution est simple, parce que les données sont très particulières. En général, on détermine l'intersection de deux surfaces en les coupant par des surfaces auxiliaires choisies de façon que les projections de leurs

Fig. 15.



lignes d'intersection avec les surfaces données soient simples et faciles à construire.

Dans le problème précédent le plan horizontal ( $Q_v$ ) et le plan de front ( $P_h$ ) jouent le rôle de surfaces auxiliaires.

Si les plans, dont on demande l'intersection, étaient donnés, l'un au moyen de deux droites  $A$ ,  $B$ , l'autre au moyen de deux droites  $C$ ,  $D$ , on pourrait prendre comme surfaces auxiliaires les plans qui projettent horizontalement ces deux dernières droites. On serait alors conduit à appliquer la solution d'un des problèmes précédents.

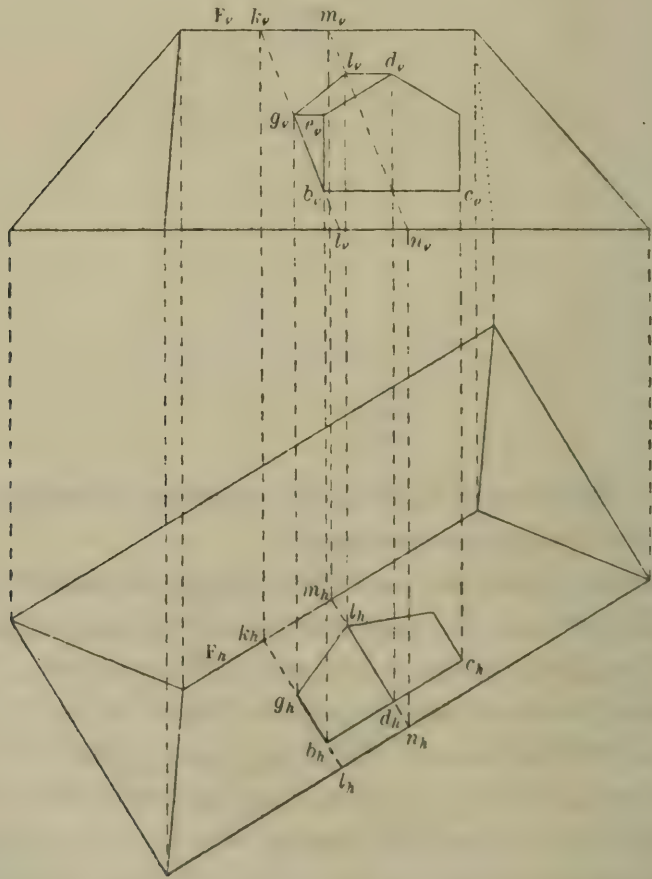
*APPLICATION. — Intersections de la toiture d'une fenêtre et de la toiture d'une maison.*

On a (fig. 16) les projections de la toiture de la maison. Le plan vertical qui contient l'ouverture de la



fenêtre se projette horizontalement suivant la droite  $b_h c_h$  qui est parallèle à l'un des côtés du rectangle de la toiture. La largeur de la fenêtre est donnée par le segment  $b_h c_h$ . Par le point  $b_h$  menons un plan vertical perpendiculairement à l'horizontale  $b_h c_h$ . Ce plan coupe le plan de la toiture suivant la droite  $(k_h l_h, k_v l_v)$ . La verticale  $b_h$  a alors pour projection verticale  $b_v e_v$  et le plan vertical

Fig. 16.

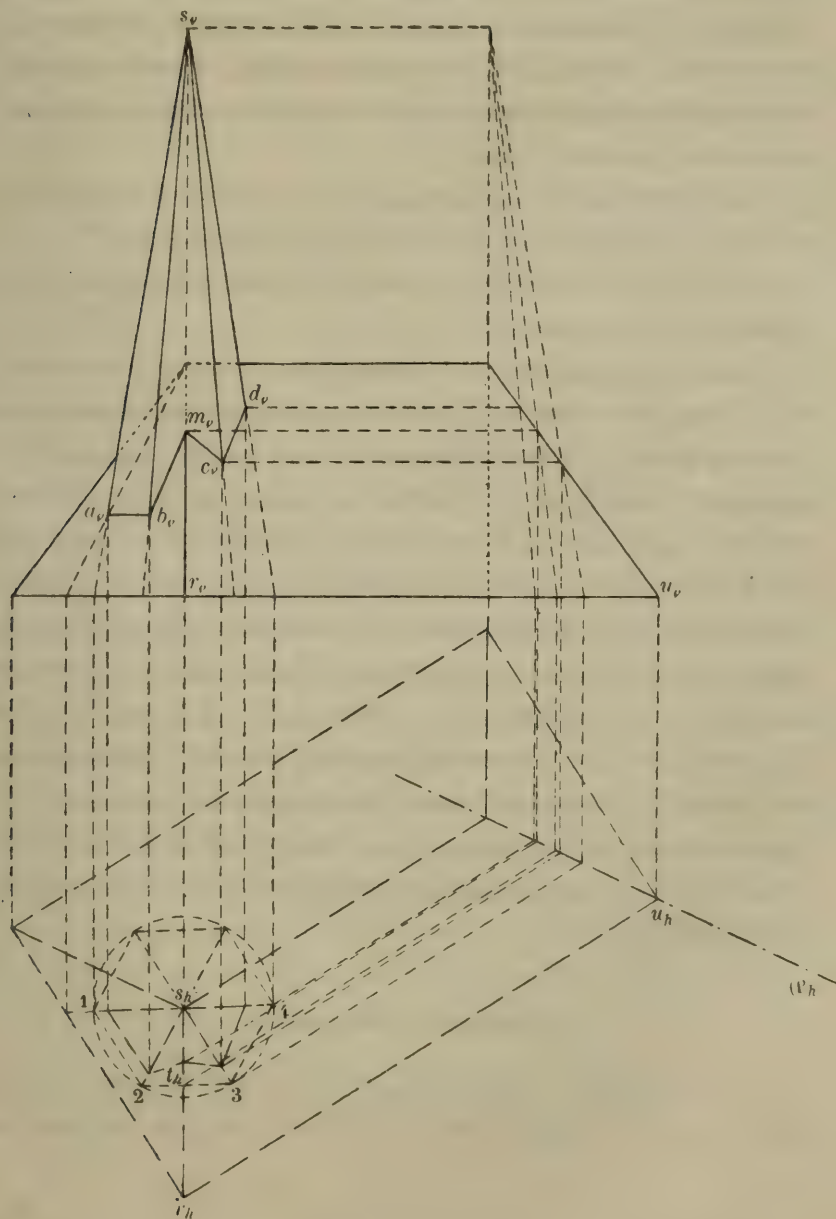


qui contient l'ouverture de la fenêtre coupe le plan de la toiture suivant l'horizontale  $b_v c_v$ .

La hauteur de la fenêtre étant supposée donnée, on achève facilement sa représentation, comme on le voit sur la figure.

APPLICATION. — *Intersections des faces d'un clocher avec la toiture du bâtiment qui le supporte.*

Fig. 17.



On donne les projections : de la toiture du bâtiment,

de la base de la pyramide qui forme le clocher et du sommet du clocher.

Cette base 1, 2, 3, 4, ... de la pyramide est tracée dans le plan horizontal qui contient les arêtes inférieures de la toiture. Pour avoir le point où l'arête du clocher  $s_h 1$  rencontre le plan de la toiture nous avons employé comme plan auxiliaire le plan vertical qui projette horizontalement cette droite.

On trouve ainsi le point  $a_v$ ; de même on détermine le point  $b_v$ ; la droite  $a_v b_v$  est du reste horizontale.

La face  $2s_h 3$  de la pyramide est rencontrée par l'une des arêtes de la toiture.

Si nous supposons cette arête dans un plan perpendiculaire au plan vertical, la construction précédente n'est plus applicable. Pour l'effectuer, on peut projeter obliquement les lignes de cette construction sur un plan vertical auxiliaire. C'est ainsi qu'est faite la figure au moyen du plan vertical auxiliaire ( $P_h$ ) et de projectantes auxiliaires parallèles à l'horizontale  $r_h u_h$ . On peut employer la même projection oblique pour construire les points de rencontre des arêtes  $s_h 3$ ,  $s_h 4$  avec le plan de la toiture. Les intersections des faces du clocher avec les plans de la toiture sont en projection verticale les lignes  $a_v b_v$ ,  $b_v m_v$ ,  $m_v c_v$ ,  $c_v d_v$ . Nous n'avons pas achevé le tracé de la projection horizontale pour ne pas compliquer la figure (1).

#### PROBLÈMES MÉTRIQUES.

Les grandeurs à mesurer sont ou des segments de droite ou des angles. Dans chacun de ces cas on amène

---

(1) J'ai indiqué l'emploi d'une projection oblique, il serait bon d'exposer ici *la méthode des projections obliques* pour la recherche des ombres.

le segment ou le plan de l'angle à être parallèle à l'un des plans de projection. Le segment ou l'angle se projette alors, sans altération de grandeur, et il peut être mesuré sur le plan de projection. On est ainsi conduit à résoudre le problème : *Amener un plan à être parallèle à l'un des plans de projection*. Pour cela il suffit de le faire tourner autour d'une droite de ce plan parallèle à ce plan de projection.

Nous allons d'abord prendre le cas particulier où le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection. Si nous supposons que ce plan est, par exemple, le plan vertical qui projette horizontalement un segment de droite donnée, la solution renferme aussi celle du problème suivant : *Déterminer la grandeur* <sup>(1)</sup> *d'un segment de droite donné par ses projections*.

Soient  $a_h b_h$ ,  $a_v b_v$  (fig. 18) les projections du segment donné. Le plan qui le projette horizontalement est  $(P_h)$ . Pour amener ce plan à être parallèle au plan vertical de projection, faisons-le tourner autour de la verticale  $a_h$ . Après la rotation, le plan  $(P_h)$  se projette horizontalement suivant la droite  $(P'_h)$ , qui est perpendiculaire à la direction des projetantes. Le point  $b$  de ce plan décrit un arc de circonférence qui est horizontal. Cet arc se projette alors verticalement suivant la droite  $b_v b'_v$  perpendiculaire à la direction des projetantes.

Sa projection horizontale est l'arc de cercle  $b_h b'_h$  dont le centre est  $a_h$  et le rayon  $a_h b_h$ . Les nouvelles projections du point  $b$  après la rotation du plan  $(P_h)$  sont  $b'_h$ ,  $b'_v$ . La nouvelle projection verticale  $a_v b'_v$  du segment donné permet de mesurer la grandeur de ce segment.

On peut amener le plan  $(P_h)$  à être horizontal. Pour

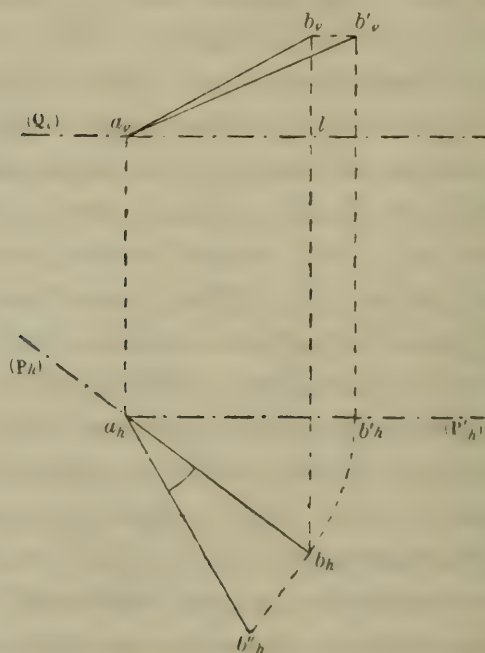
---

(1) Nous n'adoptons pas l'expression de *vraie grandeur* généralement en usage.



cela il suffit de le faire tourner autour d'une de ses horizontales. Sur la figure nous avons pris comme axe de rotation l'horizontale qui passe par le point  $a$ . La nouvelle projection horizontale du point  $b$  après la rotation est  $b''_h$ . La grandeur du segment donné est alors  $a_h b''_h$ . Nous ne développons pas davantage cette deuxième solution qui, ainsi que la première, donne l'angle que le

Fig. 18.



segment donné fait avec le plan horizontal de projection.

Si l'on veut déterminer l'angle que ce segment fait avec le plan vertical de projection, on doit amener le plan de cet angle, c'est-à-dire le plan qui projette verticalement le segment donné, à être parallèle à l'un ou à l'autre des plans de projection.

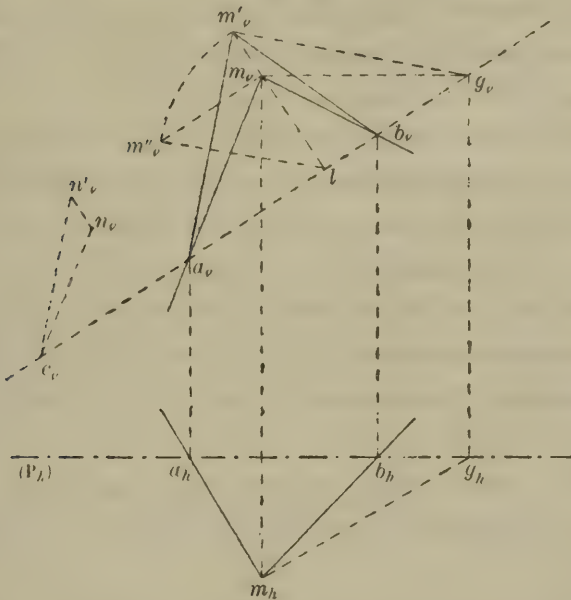
Arrivons au cas général; nous allons faire usage du lemme suivant, que je me borne à énoncer :

*Un angle droit dont l'un des côtés est parallèle à*

*l'un des plans de projection se projette sur ce plan suivant un angle droit.*

Soient  $a_h m_h$ ,  $a_v m_v$  (fig. 19) les projections d'une droite et  $b_h m_h$ ,  $b_v m_v$  les projections d'une autre droite qui rencontre la première. Ces deux droites déterminent

Fig. 19.



un plan que nous nous proposons d'amener à être de front, c'est-à-dire parallèle au plan vertical de projection.

L'axe de rotation est alors une droite de front de ce plan. Pour construire cet axe nous employons, comme on le voit sur la figure, le plan de front ( $P_h$ ).

Le point  $m$ , en tournant autour de l'axe  $a_v b_v$ , décrit un arc dont le rayon est la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite. La projection verticale de ce rayon est, en vertu du lemme précédent, la perpendiculaire  $m_v l$  abaissée du point  $m_v$  sur  $a_v b_v$ . Après la rotation du plan donné, cette droite reste perpendiculaire à  $a_v b_v$  et la nouvelle projection verticale du point  $m$  est

alors sur cette même perpendiculaire à une distance du point  $l$  égale à la longueur du segment compris entre le point  $m$  et le point  $l$  : nous avons indiqué sur la figure une des constructions permettant de déterminer cette longueur.

On la porte depuis le point  $l$  jusqu'au point  $m''_v$ . Ce point est la nouvelle projection verticale du point  $m$ , après la rotation du plan. En le joignant aux points  $a_v$ ,  $b_v$ , on a les nouvelles projections verticales des droites données, après la rotation du plan.

Soit  $n_v$  la projection verticale d'un point du plan donné; pour avoir la nouvelle projection verticale de ce point, après la rotation du plan, il suffit de construire un triangle  $n_v c_v n'_v$  semblable au triangle  $m_v a_v m'_v$ .

Inversement, si l'on donne la projection  $n'_v$  d'un point du plan supposé de front, on a la nouvelle projection de ce point, lorsque le plan est replacé dans la position qu'il doit avoir, toujours par la construction d'un triangle semblable à un triangle ayant deux sommets en  $m_v$ ,  $m'_v$  et dont le troisième sommet est un point de la droite  $a_v b_v$ .

Le problème que nous venons de résoudre donne la solution de cette question : *Déterminer l'angle compris entre deux droites*. On a, en effet (*fig. 19*), l'angle  $a_v m'_v b_v$  qui est l'angle compris entre les deux droites données.

Au lieu d'amener un plan à être de front, on peut l'amener à être horizontal au moyen de constructions tout à fait analogues aux précédentes.

Voici encore comment on peut résoudre le problème précédent. Par le point  $m$  menons une horizontale du plan donné. Les projections de cette droite sont (*fig. 19*)  $m_v g_v$ ,  $m_h g_h$ . La grandeur du segment compris entre les points  $m$  et  $g$  est  $m_h g_h$ , puisque ce segment est horizon-

tal. En décrivant alors avec ce segment pour rayon un arc de cercle dont le centre est au point  $g_v$ , on obtient le point  $m'_v$  à la rencontre de cet arc avec la perpendiculaire  $lm_v$ .

Le lemme dont nous venons de faire usage conduit immédiatement à cette conséquence : *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection verticale est perpendiculaire à une droite de front de ce plan, et sa projection horizontale est perpendiculaire à une horizontale du plan.*

Il est donc facile de tracer les projections d'une droite perpendiculaire à un plan. On détermine alors simplement la distance d'un point à un plan et l'angle d'une droite et d'un plan.

Je ne développe pas les solutions de ces questions, parce que les modifications que je propose dans ce court exposé ne changent pas les solutions généralement adoptées.

*Déterminer l'angle de deux plans.* — Pour exposer la solution de ce problème, on peut prendre les deux projections d'un tétraèdre et chercher l'angle compris entre deux faces.

On coupe ces deux faces par un plan horizontal; on obtient ainsi deux horizontales et au moyen de ces droites on achève la solution comme on le fait ordinairement en employant les traces horizontales des deux plans pour lesquels on cherche l'angle compris.

A la suite de ces problèmes théoriques, il sera très utile de présenter quelques-unes des applications que l'on rencontre dans la pratique.

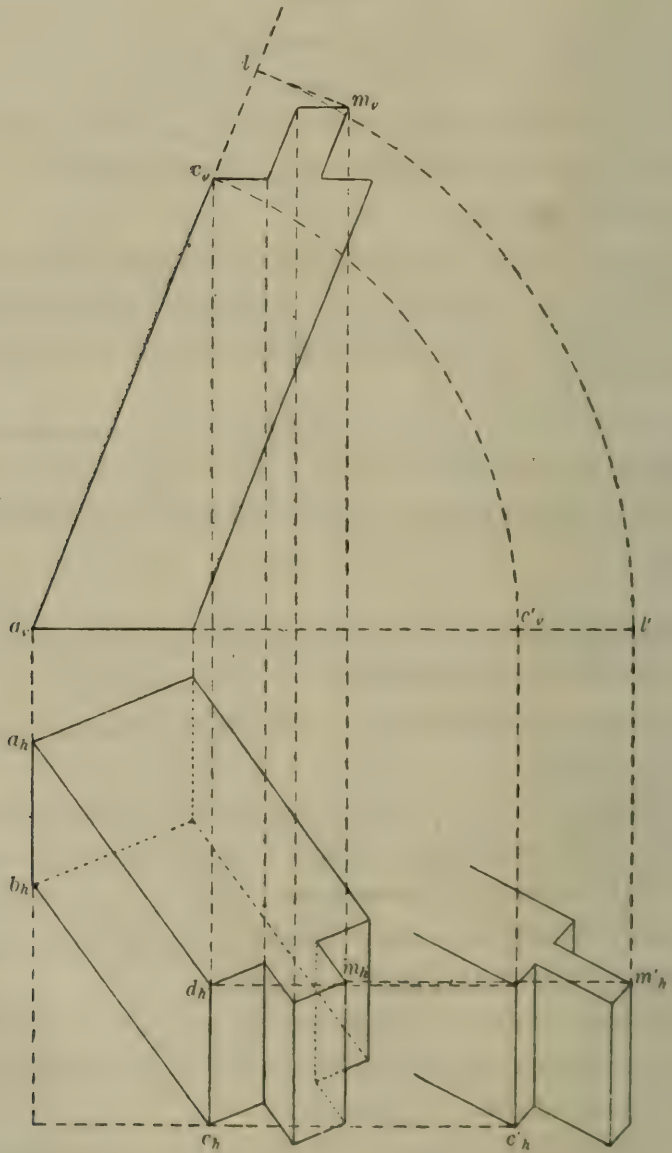
En voici une analogue à celles que l'on a à traiter en charpente.

APPLICATION. — *Une pièce de bois est terminée par*



*un tenon : déterminer la nouvelle projection de cette pièce lorsqu'on la fait tourner de façon que l'une de ses faces soit horizontale.*

Fig. 20.



Les projections de la pièce montrent (fig. 20) comment elle est placée par rapport aux plans de projection.

Supposons que la face  $a_h b_h c_h d_h$  soit amenée à être horizontale après avoir tourné autour de son horizontale  $a_h b_h$ . Le point  $c$  de cette face a pour projections, après la rotation,  $c'_v, c'_h$ . Cherchons les nouvelles projections d'un point entraîné et qui n'appartient pas au plan de la face  $a_h b_h c_h d_h$ . Prenons, par exemple, le point  $(m_h, m_v)$  qui appartient au tenon. De ce point abaissons une perpendiculaire sur le plan de la face  $abcd$ . La projection verticale de cette perpendiculaire est la perpendiculaire  $m_v l$  abaissée du point  $m_v$  sur  $a_v c_v$  et la projection horizontale est la perpendiculaire abaissée du point  $m_h$  sur  $a_h b_h$ . Le pied de cette perpendiculaire est le point  $l$ . Ce point appartenant à la face  $abcd$ , on trouve, comme pour le point  $c$ , ce qu'il devient après la rotation de la pièce de bois.

Mais la perpendiculaire  $m_v l$  à la face  $abcd$  se projette en un seul point lorsque la rotation est effectuée. Par conséquent la construction faite pour le pied de la perpendiculaire abaissée du point  $m$  sur la face  $abcd$  donne le point  $m'_h$ , nouvelle projection horizontale du point  $m$  après la rotation. On opère de la même manière pour les autres points de la figure.

Telle est une des applications que l'on peut proposer parmi beaucoup d'autres.

Il est indispensable de laisser aux élèves le soin de faire toutes ces applications après leur avoir expliqué seulement les problèmes théoriques.

On n'arrive à bien savoir la Géométrie descriptive que par l'emploi souvent répété de ces procédés. Indépendamment des épures faites à la règle et au compas, on ne saurait trop recommander l'usage des croquis à main levée. Du reste, il est toujours utile, avant de commencer une épure, de faire un choix convenable des données en essayant de voir à l'avance, au moyen de croquis, si les

résultats se présenteront de façon à permettre une lecture facile de l'épure. La Géométrie descriptive n'a pas, en effet, simplement pour objet de représenter les corps sur une feuille de dessin, mais de faire cette représentation de façon que la restitution soit facile.

---

## NOTE SUR UN DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE;

PAR M. J. MARCHAND,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. LEMME. — Soit  $F(x)$  une fonction de  $x$  qui donne une intégrale finie et déterminée lorsqu'on l'intègre entre les limites  $\mu_1$  et  $\mu$  de la variable.

La valeur de l'intégrale ne change pas si, conservant les mêmes limites, on substitue à la variable l'expression linéaire  $\mu_1 + \mu - x$ .

En effet, dans

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x) dx,$$

posons

$$\mu_1 + \mu - x = z,$$

on aura

$$-\int_{\mu}^{\mu_1} F(z) dz = \int_{\mu_1}^{\mu} F(z) dz,$$

ce qu'il fallait prouver.

L'intégrale proposée, considérée comme une aire plane qu'on ferait pivoter autour de l'ordonnée fournie par la valeur moyenne de la variable  $\frac{\mu_1 + \mu}{2}$ , aurait conduit à la même conclusion.

Les deux intégrales sont dites transformées l'une de l'autre.

La propriété ci-dessus n'est, à ma connaissance, énoncée nulle part. Sans la croire nouvelle, néanmoins mon but est de montrer ici qu'on peut en tirer parti.

## 2. Soit à intégrer

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x) dx;$$

$F'(x)$  est supposée continue ainsi que ses  $(n - 1)$  premières dérivées entre les limites proposées; remplaçons cette intégrale par sa transformée. En appliquant à cette dernière la règle de l'intégration par parties, on aura successivement

$$\begin{aligned} & \int_{\mu_1}^{\mu} F'(\mu_1 + \mu - x) dx \\ &= \mu F'(\mu_1) - \mu_1 F'(\mu) + \int_{\mu_1}^{\mu} F''(\mu_1 + \mu - x) \frac{x}{1} dx, \\ & \int_{\mu_1}^{\mu} F''(\mu_1 + \mu - x) \frac{x}{1} dx \\ &= \frac{\mu^2}{1.2} F''(\mu_1) - \frac{\mu_1^2}{1.2} F''(\mu) + \int_{\mu_1}^{\mu} F'''(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^2}{1.2} dx, \\ & \dots\dots\dots, \\ & \int_{\mu_1}^{\mu} F^{n-1}(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-2}}{1.2\dots(n-1)} \\ &= \frac{\mu^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(\mu_1) - \frac{\mu_1^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(\mu) \\ &+ \int_{\mu_1}^{\mu} F^n(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1} dx}{1.2\dots(n-1)}. \end{aligned}$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, et remarquant que

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x) dx = F(\mu) - F(\mu_1),$$



il viendra

$$\begin{aligned} F(\mu) - F(\mu_1) &= \frac{\mu}{1} F'(\mu_1) - \frac{\mu_1}{1} F'(\mu) + \frac{\mu^2}{1.2} F''(\mu_1) - \frac{\mu_1^2}{1.2} F''(\mu) \\ &+ \dots + \frac{\mu^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(\mu_1) - \frac{\mu_1^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(\mu) \\ &+ \int_{\mu_1}^{\mu} F^n(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1} dx}{1.2\dots(n-1)}. \end{aligned}$$

Cela posé, on sait que, si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues et que  $v$  conserve le même signe entre deux limites données, on peut écrire

$$\int_{\mu_1}^{\mu} uv dx = U \int_{\mu_1}^{\mu} v dx,$$

$U$  représentant la valeur de  $u$  pour une certaine substitution  $x$ , comprise entre  $\mu_1$  et  $\mu$ . Par suite, appelant  $R_n$  le dernier terme du développement précédent, on aura deux cas à distinguer :

1° Si les limites  $\mu_1$  et  $\mu$  ont le même signe, on pourra écrire

$$(1) \quad R_{1n} = \frac{\mu^n - \mu_1^n}{1.2\dots n} F^n[\mu_1\theta + \mu(1-\theta)],$$

$\theta$  étant une quantité positive comprise entre 0 et 1, introduite par la substitution à  $x$  de  $\mu_1 + \theta(\mu - \mu_1)$ ;

2° Si les limites sont de signes contraires, on remarquera que

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n &= \int_{\mu_1}^0 F^n(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} dx \\ &+ \int_0^{\mu} F^n(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} dx, \end{aligned} \right.$$

ce qui donnera, en appelant  $\theta_1$  et  $\theta$  deux coefficients

indépendants compris entre 0 et 1,

$$R_{2n} = \frac{1}{1.2 \dots n} \times \left\{ \mu^n F^n[\mu_1 + \mu(1 - \theta)] - \mu_1^n F^n[\mu + \mu_1(1 - \theta_1)] \right\}.$$

Donc finalement, représentant par  $R_n$  la forme générale du reste, en laissant au lecteur le soin de particulariser suivant les cas, on pourra écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) - F(x_0) \\ &= xF'(x_0) - x_0F'(x) + \frac{x^2}{1.2}F''(x_0) - \frac{x_0^2}{1.2}F''(x) \\ &+ \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)}F^{n-1}(x_0) - \frac{x_0^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)}F^{n-1}(x) + R_n. \end{aligned} \right.$$

Annulant l'une quelconque des limites, cette formule se réduit à la formule de Maclaurin.

3. L'intégration par partie appliquée à la transformée de l'expression

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(a+x) dx,$$

où  $a$  est une constante, eût donné la formule suivante :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(a+x) - F(a+x_0) \\ &= \frac{x}{1}F'(a+x_0) - \frac{x_0}{1}F'(a+x) + \frac{x^2}{1.2}F''(a+x_0) - \frac{x_0^2}{1.2}F''(a+x) \\ &+ \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)}F^{n-1}(a+x_0) \\ &- \frac{x_0^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)}F^{n-1}(a+x) + R_n^a. \end{aligned} \right.$$

en indiquant par  $R_n^a$  la forme générale des restes précédents dans lesquels on est parti de la forme

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F^n(a + \mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1} dx}{1.2 \dots (n-1)},$$

au lieu de

$$\int_{\mu_1}^a F^n(\mu_1 + \mu - x) \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} dx.$$

Annulant dans cette expression l'une quelconque des deux limites, on trouve la série de Taylor; posant  $a = 0$ , on retrouve la série (1); posant à la fois  $a = 0$  avec  $\mu$  ou  $\mu_1 = 0$ , on retrouve la série de Maclaurin. Le développement (2) est donc une formule synthétique qui renferme comme cas particuliers les trois formules précédentes.

*Remarques.* — Le procédé de l'intégration par parties appliqué : 1° à la transformée de  $\int_0^a F'(x) dx$  donne directement la série de Maclaurin; 2° à la transformée de  $\int_0^a F'(x + x_0) dx$ , celle de Taylor.

4. Les développements (1) et (2) sont encore vrais, au cas où la fonction à développer dépend de plusieurs variables indépendantes : les conditions de continuité de la nouvelle fonction restant, bien entendu, les mêmes que ci-dessus.

Soient, par exemple,  $F(x, y)$  une fonction de deux variables et  $t$  une variable auxiliaire, on peut toujours poser

$$x = ht, \quad y = kt,$$

$h$  et  $k$  représentant deux constantes arbitraires; ceci donne

$$F(x, y) = F(ht, kt) = \varphi(t),$$

et aussi

$$F(x_0, y_0) = F(ht_0, kt_0) = \varphi(t_0);$$

par suite

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left( \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k \right) = {}_{xy}D_{at}.$$

en posant

$$xyD_{hk}^1 = \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = xyD_{hk}^2,$$

.....,

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = xyD_{hk}^n,$$

d'après la notation symbolique ordinairement usitée.

Cela posé, si nous représentons par  $\left(\frac{dF}{dx}x + \frac{dF}{dy}y\right)^p$  ou encore par  $xyD_{xy}^p$  la  $p^{\text{ième}}$  différentielle totale de  $F(x,y)$ , dans laquelle on a remplacé  $dx$  et  $dy$  respectivement par  $x$  et  $y$ , on pourra évidemment écrire

$$t \frac{d\varphi}{dt_0} = x_0 y_0 D_{xy}^1, \quad t_0 \frac{d\varphi}{dt} = xy D_{x_0 y_0}^1,$$

$$t \frac{d^2\varphi}{dt_0^2} = x_0 y_0 D_{xy}^2, \quad t_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = xy D_{x_0 y_0}^2,$$

.....,

$$t \frac{d^n\varphi}{dt_0^n} = x_0 y_0 D_{xy}^n, \quad t_0 \frac{d^n\varphi}{dt^n} = xy D_{x_0 y_0}^n.$$

Remarquons maintenant que nous avons trouvé comme formes du reste de la série (1), suivant les cas,

$$R_{1n} = \frac{t^n - t_0^n}{1.2\dots n} F[t_0\theta + t(1-\theta)],$$

$$R_{2n} = \frac{t^n F^n[t_0 + t(1-\theta)] - t_0^n F^n[t + t_0(1-\theta_1)]}{1.2\dots n};$$

on aura, d'après les notations qui précèdent, pour former des restes de la nouvelle fonction,

$$R_{1n} = \frac{[x_0\theta + x(1-\theta)] [y_0\theta + y(1-\theta)] D_{xy} - [x_0\theta + x(1-\theta)] [y_0\theta + y(1-\theta)] D_{x_0 y_0}}{1.2.3\dots n}$$

et

$$R_{2n} = \frac{[x_0 + x(1-\theta)] [y_0 + y(1-\theta)] D_{xy} - [x_0(1-\theta_1) + x] [y_0(1-\theta_1) + y] D_{x_0 y_0}}{1.2.3\dots n}.$$



La série (1), appliquée à  $F(x, y)$ , donnera donc

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \frac{x_0 y_0 D_{xy} - x y D_{x_0 y_0}}{1} + \frac{x_0^2 y_0^2 D_{x^2 y^2} - x y D_{x_0^2 y_0^2}}{1.2} \\ + \dots + \frac{x_0 y_0 D_{x y}^{n-1} - x y D_{x_0 y_0}^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + R_n.$$

$F(a+x, b+y)$  aurait fourni un développement analogue, et le résultat est tellement évident que nous ne pensons pas devoir insister.

5. Le principe du n° 1 peut trouver d'autres applications intéressantes dans la recherche de certaines intégrales définies. Je me bornerai cependant à énoncer le fait, en faisant toutefois mention de quelques transformations qui peuvent alors être mises en usage et en me bornant à un exemple.

Nous avons trouvé

$$\int_{x_1}^x F(x) dx = \int_{x_1}^x F(x_1 + x - x) dx.$$

1° Si dans cette formule on suppose  $x_1 = -x$ , on aura

$$\int_{-x}^x F(x) dx = \int_{-x}^x F(-x) dx.$$

2° Si la fonction  $F(x)$  à intégrer se trouvait de la forme

$$f_1(x) f_2(x) f_3(x) \dots f_p(x) f_{p+1}(x) \dots f_n(x),$$

on pourrait évidemment écrire, d'après le principe (1),

$$\int_{x_1}^x f_1(x_1 + x - x) f_2(x_1 + x - x) f_3(x_1 + x - x) \dots \\ \times f_p(x_1 + x - x) f_{p+1}(x) dx \dots f_n(x) dx \\ = \int_{x_1}^x f_1(x) f_2(x) f_3(x) \dots f_p(x) f_{p+1}(x_1 + x - x) \dots \\ \times f_n(x_1 + x - x) dx.$$

En particulier, si l'on a l'intégrale

$$(\alpha) \quad \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

par exemple, on en conclura tout de suite l'équivalence de

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx.$$

3° La considération de l'intégrale comme une aire plane nous conduit enfin à écrire immédiatement

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x) dx = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu+\mu_1}{2}} F(x) dx + \int_{\mu_1}^{\frac{\mu+\mu_1}{2}} F(\mu_1 + \mu - x) dx,$$

ou indifféremment

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x) dx = \int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(x) dx + \int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x) dx.$$

Ainsi, par exemple, dans l'intégrale précédente  $(\alpha)$ , posons

$$p-1 = -\frac{1}{2}, \quad q-1 = -\frac{1}{2};$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Prenant la transformée de cette intégrale nouvelle, elle

se réduira à

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{4} - x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}} 2 dx \\ &= (\arcsin 2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2};\end{aligned}$$

d'où, finalement,

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi.$$

### THÉORÈME DE CINÉMATIQUE;

PAR M. E. HABICH,

Directeur de l'École spéciale des Constructions et des Mines, à Lima.

Soient (A) une courbe tracée sur le plan d'une figure mobile dans son plan; (B) son enveloppe sur le plan fixe; (C) et (C') les courbes roulantes, c'est-à-dire les lieux du centre instantané de rotation sur le plan fixe, et par rapport à la figure mobile.

Soient K' et K les centres de courbure de l'enveloppée (A) et de son enveloppe (B); O<sub>1</sub> le point actuel de contact des lignes (C') et (C), c'est-à-dire le centre instantané de rotation; et O<sub>2</sub> le centre instantané géométrique du second ordre. Ce dernier point est situé, comme on sait, sur la normale commune aux courbes roulantes, et à une distance de O<sub>1</sub> égale à

$$O_1 O_2 = \frac{RR'}{R \pm R'},$$

R et R' étant les rayons de courbure des lignes (C) et (C').

On détermine le centre de courbure de l'enveloppe (B) ou, ce qui revient au même, de la trajectoire décrite par le centre de courbure  $K'$  de l'enveloppée (A), par la formule connue,

$$(1) \quad KK' = \frac{\overline{K'O_1}^2}{\overline{K'H}};$$

H est la projection du centre instantané du second ordre  $O_2$  sur la normale  $K'O_1$ .

Pour interpréter géométriquement la formule (1), prenons un point *quelconque* I du plan, joignons-le aux points  $K'$ ,  $O_1$  et à la projection H du centre instantané du second ordre  $O_2$ , traçons par le centre  $O_1$  une parallèle  $O_1L$  à HI, et par le point L où cette parallèle rencontre  $K'I$ , la droite LK parallèle à  $IO_1$  : cette dernière rencontre  $K'O_1$  au centre K de l'enveloppe (B).

Effectivement on a

$$\frac{KK'}{\overline{K'O_1}} = \frac{K'L}{K'I} = \frac{K'O_1}{\overline{K'H}},$$

d'où

$$KK' = \frac{\overline{K'O_1}^2}{\overline{K'H}}.$$

Dans les constructions de la formule (1) que nous avons eu l'occasion de rencontrer, dans les ouvrages qui traitent de cette question, on suppose le point I en coïncidence soit avec le centre  $O_2$ , soit avec un point quelconque de la droite  $O_2H$ .

Une construction inverse donnerait la projection H du centre de second ordre  $O_2$ , connaissant les centres de courbure  $K'$ , K et le centre instantané de rotation  $O_2$ .

Il est évident que cette construction est applicable au cas où le centre du second ordre  $O_2$  se trouverait sur la normale commune à l'enveloppée et à l'enveloppe, c'est-



à-dire quand il serait sa propre projection. En particulier, connaissant les lignes roulantes  $(C)$  et  $(C')$ , elle permettra de déterminer le centre instantané du second ordre  $O_2$ , comme l'avait déjà indiqué M. Ph. Gilbert dans son excellent *Cours de Mécanique analytique* (1877, p. 58).

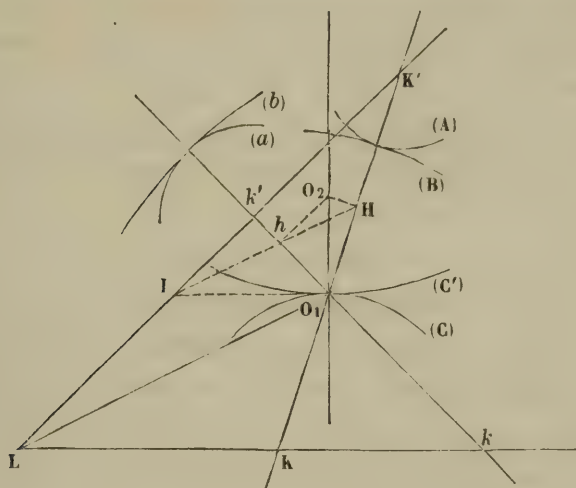
Soient maintenant  $k'$  et  $k$  les centres de courbure d'une seconde enveloppée  $(a)$  et de son enveloppe  $(b)$ , et  $h$  la projection du centre instantané du second ordre  $O_2$  sur la normale  $O_1k'$ .

Prenons le point d'intersection des droites  $k'K'$  et  $hH$  qui unissent respectivement les centres de courbure  $k'$  et  $K'$  de deux enveloppées  $(a)$  et  $(A)$  et les projections  $h$  et  $H$  du centre  $O_2$  sur leurs normales, pour le point  $I$  de la construction donnée plus haut, et achevons-la. On aura  $O_1L$  parallèle à  $HhI$ , et les deux centres de courbure  $k$  et  $K$  des enveloppées  $(b)$  et  $(B)$  se trouveront sur la même droite  $LKk$  parallèle à  $O_1I$ . On peut donc énoncer le théorème général suivant :

*Dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, les droites passant par les centres de courbure de deux lignes de la figure mobile et par les centres de courbure de leurs enveloppes sur le plan fixe se rencontrent en un point de la droite menée par le centre instantané de rotation, parallèlement à celle qui joint les projections du centre instantané du second ordre, sur les normales au premier et au second système d'enveloppées et d'enveloppes.*

Si le centre instantané du second ordre se trouvait sur une des deux normales, il serait lui-même sa propre projection, et la droite  $O_1L$  serait perpendiculaire à l'autre normale. En particulier, si un des deux systèmes de courbes tangentes  $(a)$ ,  $(A)$  ou  $(b)$ ,  $(B)$ , était con-

stitué par les courbes roulanges (C) et (C'), on obtiendrait le théorème dû à Euler <sup>(1)</sup>, mais attribué généralement à Savary, qui l'avait énoncé sous une forme plus



explicite que Euler, dans ses *Leçons de Mécanique* à l'École Polytechnique, à savoir :

*Les droites qui joignent les centres de courbure de l'enveloppée (A) et de la courbe mobile (C') d'une part, et de l'enveloppe (B) et de la courbe fixe (C) de l'autre, se coupent en un point de la perpendiculaire élevée au centre instantané de rotation sur la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée.*

Une construction inverse de la construction générale que nous avons donnée permettrait de déterminer, avec la même facilité, les projections  $h$  et  $H$  du centre instantané géométrique du second ordre  $O_2$ , connaissant les centres de courbure  $k'$  et  $K'$  des enveloppées  $(a)$  et  $(\Lambda)$  et  $k$  et  $K$  de leurs enveloppes  $(b)$  et  $(B)$ , correspondant

(<sup>1</sup>) *Supplementum de figura dentium rotarum*. (*Novi Commentarii Academiæ Petropolitanae*, t. XI, pro anno 1765; imprimé en 1767, pages 207 à 231).

à la position considérée de la figure mobile. Les projections  $h$  et  $H$  une fois déterminées, on n'aurait qu'à tracer une circonférence de cercle par ces deux points et le centre instantané de rotation  $O_1$ , pour avoir la *circonférence des inflexions* dont le diamètre passant par  $O_1$  donne la direction de la normale commune aux courbes roulantes  $(C')$  et  $(C)$ , et le point diamétralement opposé à  $O_1$  est le centre instantané du second ordre  $O_2$ .

Nous n'insisterons pas sur d'autres manières de démontrer notre théorème général et sur ses conséquences, l'objet unique de cette Note étant de l'établir par la voie qui nous a paru la plus directe et la plus simple.

**RELATION ENTRE LES DISTANCES MUTUELLES : 1° DE QUATRE POINTS SITUÉS SUR UN MÊME CERCLE; 2° DE CINQ POINTS SITUÉS SUR UNE MÊME SPHÈRE;**

PAR M. X. ANATOMARI,

Professeur au lycée de Carcassonne.

MM. Rouché et de Comberousse, dans leur excellent *Traité de Géométrie*, établissent ces relations en s'appuyant sur la règle de multiplication de deux déterminants.

Voici une démonstration qui nous paraît nouvelle.

Soient  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$  les coordonnées rectangulaires de quatre points A, B, C, D situés sur un même cercle; et  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$  les distances respectives de ces quatre points à un point quelconque  $O_1$  du plan. Expriment que ces quatre points sont sur un

même cercle, on obtient quatre équations de la forme

$$a_1^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0,$$

$$b_1^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0,$$

$$c_1^2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma = 0,$$

$$d_1^2 + \alpha x_4 + \beta y_4 + \gamma = 0.$$

L'élimination des constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  donne

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ b_1^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ c_1^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ d_1^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit sans difficulté que cette relation exprime que : Dans tout quadrilatère inscriptible, si l'on multiplie l'aire du triangle formé par trois sommets, par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs à deux sommets opposés est égale à la somme des deux autres.

Si donc A est l'aire du triangle opposé au sommet A, B celle du triangle opposé au sommet B, etc., la relation précédente peut s'écrire

$$A a_1^2 - B b_1^2 + C c_1^2 - D d_1^2 = 0.$$

Soient  $O_2, O_3, O_4$  trois autres points quelconques du plan,  $a_2, b_2, c_2, d_2$  les distances respectives du point  $O_2$  aux points A, B, C, D, etc. On aura, comme plus haut,

$$A a_2^2 - B b_2^2 + C c_2^2 - D d_2^2 = 0,$$

$$A a_3^2 - B b_3^2 + C c_3^2 - D d_3^2 = 0,$$

$$A a_4^2 - B b_4^2 + C c_4^2 - D d_4^2 = 0.$$

L'élimination des constantes A, B, C, D entre ces



quatre dernières équations donne la relation

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & d_2^2 \\ a_3^2 & b_3^2 & c_3^2 & d_3^2 \\ a_4^2 & b_4^2 & c_4^2 & d_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est une relation entre les distances respectives de quatre points d'un cercle à quatre points quelconques de son plan.

Pour en déduire la relation que nous avons en vue, il suffit de supposer que  $O_1$  coïncide avec  $A$ ,  $O_2$  avec  $B$ , etc.

Le même procédé est applicable à la recherche de la relation entre les distances mutuelles de cinq points sur une même sphère.

Enfin on peut l'appliquer à la recherche des relations entre les distances mutuelles de cinq points situés d'une manière quelconque dans un plan, de six points situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Cette recherche se fait sans difficulté à l'aide de ce qui précède ; pour cinq points d'un plan, cette relation est

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} \\ d_{2,1} & 0 & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & 0 & d_{3,4} & d_{3,5} \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & 0 & d_{4,5} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,3} & d_{5,4} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$d_{i,k}$  désignant le carré de la distance du point  $i$  au point  $k$ , en appelant 1, 2, 3, 4, 5 les cinq points, et en posant  $d_{ik} = d_{ki}$ .

---

**COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS  
LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880**

[SUITE (1)].

**Bordeaux.**

*Composition d'Analyse.* — Équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes représentées par une équation contenant un paramètre variable.

Extension aux trajectoires obliquangles.

Application aux trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0,$$

$\lambda$  étant le paramètre variable.

Étendre, si le temps le permet, la recherche des trajectoires orthogonales ou obliquangles au cas des courbes représentées par des équations en coordonnées polaires.

*Composition de Mécanique.* — Un point matériel M assujéti à rester sur une droite CD est attiré vers le point O par une force qui varie en raison inverse du carré de la distance. Ce corps part sans vitesse d'un point A de la droite. On demande :

1° De déterminer la vitesse du point M à un instant donné (indiquer diverses méthodes);

2° De trouver la pression exercée par le point M sur la droite OA;

3° De résoudre complètement le problème en supposant les angles O et X, que font les droites OM, OA avec

(1) *Nouvelles Annales*, 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 133.

*Ann. de Mathémat.*, 3<sup>e</sup> série, t. I (Octobre 1882).

la perpendiculaire à CD, assez petits pour que l'on puisse poser  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ,  $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ . Exprimer en fonction de  $\theta$  le temps  $t$  que le mobile met à atteindre une position M quelconque ;

4° De déterminer la longueur L du pendule simple OM' qui, vu du point O, paraîtrait osciller dans le même temps que le point M (OM et OM' doivent toujours former le même angle  $\theta$  avec la perpendiculaire à CD, au degré d'approximation indiqué).

*Épreuve pratique.* — Le 12 mars 1880, on a observé  $\alpha$  d'Orion vers l'Ouest, à  $14^{\circ} 23' 15''$ , 23 au-dessus de l'horizon. On demande de calculer l'heure sidérale de l'observatoire et l'azimut de l'étoile à l'instant de l'observation. Les coordonnées de  $\alpha$  d'Orion sont

$$\alpha = 5^{\text{h}} 48^{\text{m}} 42^{\text{s}}, 21,$$

$$\delta = 7^{\circ} 22' 57'', 2.$$

La latitude du point d'observation est  $44^{\circ} 50' 19'', 0$ .

#### Caen.

*Composition de Géométrie analytique.* — Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connaît un sommet et une asymptote.

*Composition d'Analyse et de Mécanique.* — 1° Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{c^2 \cos^2 x + d^2 \sin^2 x} dx.$$

2° Déterminer sur une surface gauche de révolution les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

3° Déterminer l'accélération totale d'un point, connaissant son mouvement relatif par rapport à certains axes et le mouvement de ces axes.

4° Une barre homogène et très mince, reposant sur un plan horizontal parfaitement poli, est choquée par une bille dont la vitesse est perpendiculaire à la barre; en supposant les deux corps parfaitement élastiques, on demande le mouvement qu'ils prendront après le choc.

*Épreuve pratique.* — Résolution d'un triangle sphérique.

#### Grenoble.

*Composition d'Analyse.* — Trouver une courbe plane telle que, si d'un point fixe pris dans son plan on mène des rayons vecteurs à ses différents points, le lieu de la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur correspondant soit une courbe symétrique de la proposée par rapport au point fixe.

On vérifiera que la courbe trouvée satisfait bien à la condition énoncée.

*Composition de Mécanique.* — On donne un cylindre vertical à base circulaire, et par un point B de sa surface on lance un point matériel pesant, assujéti à rester sur la surface de ce cylindre. La vitesse initiale est  $V_0$ ; elle fait un angle  $\alpha$  avec la génératrice du point B.

On demande de déterminer le mouvement du point. On demande en outre de déterminer à quelle hauteur maximum il s'élèvera.

Quelle doit être la vitesse initiale  $V_0$  pour que le point, en atteignant cette hauteur maximum, se retrouve sur la génératrice du point de départ B?

Trouver la forme que prend la trajectoire du mobile lorsqu'on développe la surface cylindrique sur un plan.

Calculer la réaction du cylindre sur le point.

*Épreuve pratique.* — On a mesuré en un lieu de la Terre les hauteurs d'une étoile et du centre de la



Lune au-dessus de l'horizon, ainsi que leur différence d'azimut, et l'on demande sous quel angle leur distance serait vue du centre de la Terre, en tenant compte de la réfraction.

*Données.*

Hauteur de l'étoile.....	27°35'
Hauteur du centre de la Lune.....	35°20'
Différence des azimuts.....	13°15'
Parallaxe horizontale de la Lune..	57'2"

Réfraction  $\theta = 60''$ ,  $6 \tan z$ ,  $z$  étant la distance zénithale de l'astre.

**Lyon.**

*Composition d'Analyse.* — On demande d'intégrer l'équation

$$(y^3 + 2xy^2)dy - 2y^3dx + (x+y)(xdy - xdx) = 0.$$

On indiquera de plus la marche à suivre pour trouver un facteur d'intégrabilité homogène, quand l'équation à intégrer présente cette forme.

*Composition de Mécanique.* — Un mobile libre, non pesant, est attiré vers deux centres fixes par deux forces proportionnelles à la distance et dont les intensités sont respectivement comme 1 à 3, à l'unité de distance.

On demande d'étudier le mouvement du mobile en supposant qu'il soit d'abord en repos et que le mouvement ait lieu, soit dans le vide, soit dans un milieu résistant. On admettra dans ce dernier cas que la résistance est proportionnelle à la vitesse et a un coefficient très faible.

*Épreuve pratique.* — En un lieu dont la latitude est égale à  $48^{\circ}50'49''$ , on trouve, à un moment donné, pour hauteur d'une étoile  $13^{\circ}57'52''$  et pour déclinaison

$8^{\circ}25'45''$ , 2. On demande l'angle horaire de l'étoile au moment de l'observation.

### Montpellier.

*Composition d'Analyse.* — Déterminer l'équation finie d'une courbe gauche d'après les conditions suivantes :

1<sup>o</sup> La courbe est située sur la surface du cône  $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ ;

2<sup>o</sup> Toutes les tangentes à cette courbe rencontrent le cercle

$$z = h, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Rectification de la courbe. Calcul de la surface du cône comprise entre l'arc de la courbe et deux génératrices fixes.

*Composition de Mécanique.* — Équations de l'équilibre d'un fil flexible. Application à la chaînette.

*Épreuve pratique.* — On a trouvé pour les distances zénithales de deux étoiles les valeurs

$$z = 73^{\circ}19'26'', 5,$$

$$z' = 40^{\circ}53'56'', 3,$$

leurs déclinaisons étant d'ailleurs

$$D = 69^{\circ}55'36'', 4,$$

$$D' = 81^{\circ}34',$$

et la différence  $\mathcal{R} - \mathcal{R}'$  de leurs ascensions droites étant

$$78^{\circ}49'38'', 3.$$

On demande : 1<sup>o</sup> d'indiquer les opérations à effectuer pour trouver l'angle du vertical d'une de ces étoiles et de son plan horaire; 2<sup>o</sup> en supposant que cet angle ait

été trouvé égal à  $43^{\circ}29'8'',3$ , calculer la latitude du lieu et l'angle horaire correspondant à l'observation des deux astres faite simultanément par deux observateurs.

### Nancy.

*Composition d'Analyse.* — 1<sup>o</sup> Soit une intégrale définie  $\int_0^b f(x) dx$ , dans laquelle  $f(x)$  devient infinie pour une valeur  $x = c$  comprise entre  $a$  et  $b$ ; supposons qu'on puisse mettre  $f(x)$  sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(c-x)^n},$$

$n$  étant positif, et  $\varphi(x)$  n'étant pas nul pour  $x = c$  et restant fini entre  $x = a$  et  $x = b$ .

On demande d'expliquer dans quel cas  $\int_a^b f(x) dx$  sera fini, dans quel cas  $\int_a^b f(x) dx$  sera infini.

Exemples à prendre :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \int_0^{\pi} \cos^{-p} x \sin^{-q} x dx.$$

On demande de démontrer que  $\int_a^b f(x) dx$  peut être indéterminé. Les candidats choisiront pour exemple  $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ , et montreront comment cette intégrale pourra devenir déterminée si l'on fait varier  $x$  de  $-1$  à  $+1$  en le faisant passer par des valeurs imaginaires.

2<sup>o</sup> Prouver que l'équation différentielle

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

où  $n$  est un nombre entier positif, peut être satisfaite par un polynôme entier et comment on peut en conclure la solution générale.

*Composition de Mécanique.* — 1° Démontrer le principe de d'Alembert.

2° Étudier le mouvement du pendule cycloïdal dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

*Épreuve pratique.* — Résolution d'un triangle sphérique.

#### Toulouse.

*Composition d'Analyse.* — On considère la surface enveloppe de la sphère représentée par l'équation contenant deux paramètres arbitraires  $a$  et  $b$ ,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + [z - F(b)]^2 = \varphi^2(a),$$

$F$  et  $\varphi$  étant deux fonctions données quelconques. Trouver les lignes de courbure de cette surface. On montrera que les lignes de courbure sont des lignes planes et que les plans d'un des systèmes sont parallèles au plan des  $yz$ .

*Composition de Mécanique.* — Une plaque pesante, homogène, infiniment mince, d'égale épaisseur et dont la forme est celle d'un triangle rectangle, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le sommet de l'angle droit. Déterminer :

1° L'angle que fait l'un des côtés de l'angle droit avec l'horizontale située dans le plan d'oscillation de la plaque et passant par le sommet de cet angle droit, quand la plaque est en équilibre;

2° L'amplitude des oscillations que la plaque exécute



lorsqu'on l'abandonne à son poids après avoir amené le côté considéré dans une position horizontale.

*Épreuve pratique.* — Une étoile dont la déclinaison est  $+ 15^\circ$  passe au méridien d'un lieu à  $2^h$  (temps sidéral). La latitude du lieu est  $35^\circ$ . A quelle heure sidérale l'étoile se couchera-t-elle? (*A suivre.*)

---

### CORRESPONDANCE.

---

*Lettre de M. H. Faure, chef d'escadrons d'Artillerie en retraite.*

Dans mon Mémoire sur la *Théorie des indices*, j'ai démontré le théorème suivant (*Nouvelles Annales de Mathématiques*; 1876, p. 317):

*Si l'on prend sur une sphère de rayon R, dont le centre est au point O, deux points a' et b', et sur une autre sphère de rayon R', dont le centre est au point O', deux points a et b, on a la relation*

$$\overline{aa'}^2 \cdot \overline{bb'}^2 - \overline{ab'}^2 \cdot \overline{ba'}^2 = 4ab \cdot a'b' [RR' \cos \gamma \gamma' \cos \theta + (O, \gamma)(O', \gamma') \cos DD'],$$

*dans laquelle  $\gamma$  et  $\gamma'$  indiquent les droites  $ab$ ,  $a'b'$ ;  $(O, \gamma)$  et  $(O', \gamma')$  sont les distances des centres à ces droites,  $\theta$  est l'angle sous lequel se coupent les sphères, enfin D et D' sont les plans diamétraux  $Oab$ ,  $O'a'b'$ .*

La question 1414 est un cas très particulier de cette relation. Il suffit d'y supposer : 1° que les sphères O et O' se coupent à angle droit; 2° que les plans D et D' sont rectangulaires.

Cela suffit pour que la relation indiquée par M. Schröter

ait lieu. Pour avoir l'énoncé même de la question 1414, il faut encore supposer que les plans D et D' passent par la ligne des centres.

*Note du rédacteur.* — La démonstration directe du théorème de M. Schröter, dont l'énoncé est très simple, n'exige la connaissance d'aucune nouvelle théorie ; elle s'appuie entièrement sur les propositions les plus connues de la Géométrie élémentaire. La question 1414 reste au nombre des questions proposées dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. (G.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1337

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 480 ) ;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

*Trouver un cercle par rapport auquel la cissoïde se transforme en elle-même par polaires réciproques.*

(F. FOURET.)

Soit

$$(1) \quad F(x, y) = x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$$

l'équation de la cissoïde donnée. Cette courbe étant symétrique par rapport à l'axe des  $x$ , le cercle directeur cherché aura son centre sur cet axe, et son équation sera de la forme

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + C = 0.$$

On obtiendra l'équation de la courbe polaire réciproque de la cissoïde en éliminant  $x$  et  $y$  entre l'équation (1) et les relations suivantes :

$$\frac{f'_{x_1}}{F'_{x_1}} = \frac{f'_{y_1}}{F'_{y_1}} = \frac{f'_{z_1}}{F'_{z_1}},$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad \frac{2x_1 + A}{3x^2 + y^2} = \frac{y_1}{y(x-a)} = \frac{Ax_1 + 2C}{-ay^2}.$$

Multipliant les deux termes du premier rapport par  $a$  et ajoutant terme à terme avec le dernier, on en déduit

$$\frac{(2a + A)x_1 + Aa + 2C}{3a} \frac{1}{x^2} = \frac{y_1}{y(x-a)},$$

et

$$\frac{(2a + A)x_1 + Aa + 2C}{3a} \frac{1}{x^2} = \frac{Ax_1 + 2C}{-ay^2}.$$

Si, maintenant, on multiplie ces deux proportions l'une par l'autre, après avoir élevé la première au carré, on obtient

$$(4) \quad \left[ \frac{(2a + A)x_1 + Aa + 2C}{3a} \right]^3 \frac{1}{x^6} = \frac{y_1^2 (Ax_1 + 2C)}{-ay^4(x-a)^2}.$$

Or, l'équation (1) peut s'écrire

$$(5) \quad x^3 = (a-x)y^2, \quad \text{d'où} \quad x^6 = (a-x)^2 y^4;$$

l'équation (4) devient donc

$$\left[ \frac{(2a + A)x_1 + Aa + 2C}{3a} \right]^3 + \frac{y_1^2}{a} (Ax_1 + 2C) = 0.$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (5), il suffit de poser

$$2a + A = 3a \quad \text{et} \quad Aa + 2C = 0,$$

d'où

$$A = a \quad \text{et} \quad C = -\frac{a^2}{2}.$$

Par suite, le cercle cherché a pour équation

$$x^2 + y^2 + ax = \frac{a^2}{2} = 0.$$

ou

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Leinekugel.

### Question 1404

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 335);

PAR M. MORET-BLANC.

*On peut toujours trouver deux nombres  $t$  et  $u$ , tels que*

$$At^3 + Bu^2 + C$$

*soit divisible par 7; A, B, C étant trois nombre entiers, positifs ou négatifs, non divisibles par 7.*

(PELLET.)

Il suffit de prouver que l'on peut toujours choisir  $t$  et  $u$  de telle sorte que le résidu de  $At^3 + Bu^2$ , par rapport au module 7, soit l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6; et, par conséquent, qu'ajouté au résidu de  $C$ , il donne une somme égale à 7.

Les résidus de  $t^3$  sont 0, 1, 6; ceux de  $u^2$  sont 0, 1, 2, 4.

On a donc la Table de résidus suivante :

A.	$At^3$ .	B.	$Bu^2$ .
1.....	0, 1, 6	1.....	0, 1, 2, 4
2.....	0, 2, 5	2.....	0, 2, 4, 1
3.....	0, 3, 4	3.....	0, 3, 6, 5
4.....	0, 4, 3	4.....	0, 4, 1, 2
5.....	0, 5, 2	5.....	0, 5, 3, 6
6.....	0, 6, 1	6.....	0, 6, 5, 3

Il faut vérifier que, quels que soient les résidus de  $A$  et  $B$ , on obtient les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 en ajoutant un résidu de  $At^3$  à un résidu de  $Bu^2$ . La vérification se



fait immédiatement sur les deux premières lignes; or elle suffit, car, en multipliant les résidus 1, 2, 3, 4, 5, 6 par un nombre quelconque premier avec 7 et divisant par 7, on ne fait que reproduire les mêmes résidus dans un autre ordre.

La vérification des lignes 1 et 1 entraîne donc la vérification des lignes 2 et 2, 3 et 3, 4 et 4, 5 et 5, 6 et 6; et, par suite de deux lignes de rangs quelconques, car on a toutes les combinaisons de valeurs, comme on le voit dans le tableau. Le théorème est donc démontré.

### Question 1408

( voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 336 );

PAR M. LIONNET.

*Trouver les nombres pairs et positifs ayant chacun cette curieuse propriété d'être d'autant de manières la somme de deux impairs premiers que celle de deux impairs composés.* (LIONNET.)

Pour résoudre ce problème, nous ferons usage de la formule

$$q + x = y + z,$$

dont nous avons donné la démonstration (1), et dans laquelle  $q$  désigne le plus grand nombre entier contenu dans le quart d'un nombre pair et positif quelconque  $2a$ ,  $x$  le nombre des manières dont  $2a$  est la somme de deux impairs premiers,  $y$  celui dont  $2a$  est la somme de deux impairs composés et inégaux, et  $z$  celui des impairs premiers inférieurs à  $2a$ .

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 356.

Cela étant, nous distinguerons trois cas, selon que  $a$  est pair, impair premier, ou impair composé. Dans chacun des deux premiers cas,  $2a$  n'étant pas la somme de deux impairs composés égaux, chaque fois que nous trouverons  $x=y$  ou, *bien plus facilement*,  $q=z$ , nous aurons pour  $2a$  une solution du problème proposé. Dans le troisième cas, il faudra qu'on ait  $x=y+1$  ou  $q-z=-1$ . Or, de  $2a=2$  à  $2a=122$ , on ne trouve que les six solutions comprises dans le tableau suivant :

$2a$ .....	$q+x=y+z$ ,
96.....	$24+7=7+24$ ,
98.....	$24+4=3+25$ ,
100.....	$25+6=6+25$ ,
102.....	$25+9=8+26$ ,
120.....	$30+12=12+30$ ,
122.....	$30+4=4+30$ ,

et, pour chacune des trente valeurs suivantes et consécutives de  $2a$  :

$$122+2, 122+4, \dots, 122+60=182,$$

on trouve constamment  $q-z > 0$ . S'il en est ainsi pour toute valeur de  $2a > 182$ , il est clair que les six nombres inscrits au-dessous de  $2a$  dans le tableau précédent répondront seuls à l'énoncé. C'est ce que nous allons établir en nous appuyant sur le principe suivant :

*Quelle que soit la différence  $q-z$  (négative, nulle ou positive), relative à un nombre pair  $2a > 5$ , la différence  $q'-z'$ , relative au nombre pair  $2a'=2a+60$ , sera au moins égale à  $q-z$ .*

En effet, comme on aura  $q'-q=15$ , il suffira de prouver que  $z'-z$  est au plus égal à 15, c'est-à-dire

que, parmi les trente impairs consécutifs,

$$2a + 1, 2a + 3, \dots, 2a + 59,$$

il y a au plus quinze impairs premiers ou au moins quinze impairs composés. Or, parmi trente impairs consécutifs  $> 5$ , il y a : 1° deux impairs composés multiples de 15; 2°  $(6 - 2) = 4$  impairs composés multiples de 5 et premiers à 3; 3°  $(10 - 2) = 8$  impairs composés multiples de 3 et premiers à 5; 4° au moins 4 impairs composés multiples de 7, dont il faut déduire au plus un multiple de 35 pouvant se trouver parmi les multiples de 5 déjà comptés comme impairs composés, puis deux multiples de 21 pouvant se trouver parmi les multiples de 3. Il restera donc au moins un impair composé multiple de 7 et premier à 15, lequel nombre 1, ajouté au nombre  $(2 + 4 + 8) = 14$  des impairs composés non premiers à 15, donne un minimum de quinze impairs composés différents.

Ce principe étant démontré, si l'on ajoute 60 à chacun des trente nombres pairs consécutifs 124, 126, ..., 182 pour chacun desquels on a  $q - z > 0$ , on obtiendra une nouvelle série 184, 186, ..., 242 de trente nombres pairs consécutifs faisant suite à la précédente, et pour chacun desquels on aura encore  $q - z > 0$ , et ainsi de suite; donc, en vertu de ce qui précède, aucune valeur de  $2a$ , supérieure à 122, n'est une solution du problème proposé; c'est ce qu'il restait à démontrer.

### Question 1409

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 336):

PAR M. E. BÉNÉZECH.

Élève au Prytanée militaire, à La Flèche.

*Quelle valeur faut-il donner à l'angle A au sommet d'un triangle isocèle ABC, pour que le quadrilatère,*

ayant pour sommets les pieds  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des trois hauteurs du triangle, et le milieu de la droite qui joint leur point de concours au sommet  $A$ , soit un parallélogramme?

(LIONNET.)

Soient  $M$  le point de concours des hauteurs et  $D$  le milieu de  $MA$ .

Les quatre points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D$  se trouvent sur le cercle des neuf points du triangle, l'angle  $B'DC'$  est le supplément de  $B'A'C'$ , et, comme ces deux angles doivent être égaux entre eux, pour que le quadrilatère  $B'DC'A'$  soit un parallélogramme, chacun d'eux est droit. Il faut, de même, que les angles  $DB'A'$ ,  $DC'A'$  soient droits. Le triangle  $ABC$  étant isocèle,  $A'B'$  est égal à  $A'C'$  : ainsi le parallélogramme est un carré.

Le quadrilatère  $AB'MC'$  est inscriptible dans un cercle dont  $D$  est le centre : donc l'angle  $A$  est égal à  $45^\circ$  <sup>(1)</sup>.

*Note.*— Même solution de MM. L. Reboul; E. Dervillée; Clausset; Clavel; Robaglia; Regnier, élèves au Prytanée militaire, à la Flèche; et par M. Victor de Strékalof, à Saint-Petersbourg

M. Moret-Blanc a résolu la question au moyen de calculs trigonométriques qui ont donné, pour l'angle  $A$ , les valeurs  $45^\circ$  et  $135^\circ$ .

## QUESTIONS.

1423. On donne une conique fixe et deux points  $A$  et  $A'$  situés sur une tangente à cette courbe.

Par le point  $A'$ , on mène une seconde tangente qui

(<sup>1</sup>) Cette solution suppose que le point de concours des hauteurs est intérieur au triangle  $ABC$ ; lorsque ce point est extérieur au triangle, l'angle  $A$  est de  $135^\circ$ . Dans les deux cas, le côté du carré est égal à la moitié de la base du triangle.

(G.)



touche en un point  $d$  la conique. On mène la droite  $Ad$  qui rencontre de nouveau la conique au point  $e$ , la droite  $A'e$  qui coupe la conique au point  $f$ , et enfin la droite  $Af$  rencontrant de nouveau la conique au point  $g$ .

Démontrer que la tangente à la conique au point  $g$ , et la droite  $A'ef$  se coupent en un point de la seconde tangente menée du point  $A$  à la courbe.

(GENTY.)

1424. Étant donnés un ellipsoïde et un point  $A$ , on mène par ce point une sécante variable  $D$ ; soit  $D_1$  la droite conjuguée de  $D$  par rapport à l'ellipsoïde. Trouver le lieu de la projection  $M$  du point  $A$  sur la droite  $D_1$ .

(BARBARIN.)

1425. La normale en  $M$  à une parabole rencontre cette courbe en un second point  $N$ , et son axe en  $P$ . Par le point  $Q$  milieu de  $MN$ , on mène une parallèle à l'axe de la parabole, et du point  $M$  on abaisse la perpendiculaire  $MR$  sur cette droite :

1° Démontrer que  $PR$  est perpendiculaire à  $MN$ ;

2° Trouver le lieu géométrique du point  $R$  lorsque le point  $M$  se déplace sur la parabole.

(CHAMBON.)

1426. D'un point  $P$  pris sur la sphère circonscrite à un tétraèdre, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces du tétraèdre :

1° Démontrer que les pieds de ces perpendiculaires sont dans un même plan;

2° Trouver l'enveloppe de ce plan.

(FAUQUEMBERGUE.)

---



---

SUR LES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DE LA LEMNISCATE ;

PAR M. H. RESAL.

---

1. *Préliminaires.* — On sait que la lemniscate de Jacques Bernoulli est un cas particulier de l'ellipse de Cassini, et qu'elle est définie par la condition que le produit des distances de chacun de ses points  $m$  à deux points fixes ou *foyers*  $F, F'$  est égal au carré de la moitié  $k$  de la distance focale.

Prenons pour origine des coordonnées le milieu  $O$  de  $FF'$ ; pour axe des  $x$  la direction de la distance focale. On trouve facilement, pour l'équation de la courbe,

$$(x^2 + y^2)^2 + 2k^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Soient  $r$  le rayon vecteur  $Om$ ,  $\varphi$  l'angle qu'il forme avec  $Ox$ , et posons

$$(1) \quad k = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Nous aurons, pour l'équation polaire de la courbe,

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

La lemniscate est formée de deux boucles qui se réunissent à l'origine par un point double.

Il nous sera plus commode, dans ce qui suit, de substituer aux axes coordonnés ci-dessus les droites qui sont respectivement inclinées sur eux de l'angle de  $45^\circ$ , et, en désignant par  $\theta$  l'angle formé par  $r$  avec le nouvel axe des  $x$ , nous aurons

$$\varphi = 45^\circ - \theta,$$

$$(2) \quad r^2 = a^2 \sin 2\theta,$$

$$(3) \quad r = a \sqrt{\sin 2\theta},$$

$$(4) \quad dr = \frac{a \cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta.$$

1° *Tangente*. — On a

$$r \frac{d\theta}{dr} = \tan 2\theta,$$

ce qui exprime que la tangente forme, avec le rayon vecteur, un angle égal au double de l'angle polaire. On voit ainsi que les axes sont tangents en O la courbe.

2° *Sous-tangente*. — Elle a pour expression

$$r \sin 2\theta = \frac{r^3}{a^2}.$$

3° *Rectification*. — Si  $ds$  est l'élément de la courbe, on a

$$dr = ds \cos 2\theta;$$

d'où, en vertu de l'équation (4),

$$(5) \quad \begin{aligned} ds &= \frac{a d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}, \\ s &= a \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\sin 2\theta = \cos^2 \alpha,$$

on a

$$d\theta = - \frac{\sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^4 \alpha}} = - \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = - \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}},$$

et

$$s = - \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}} = - k \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}},$$

fonction elliptique de première espèce, dont le module est  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . On retombe ainsi sur une formule de M. Serret.

4° *Rayon de courbure*. — L'angle formé par la tan-

gente avec  $Ox$  étant  $3\theta$ , l'angle de contingence est  $3 d\theta$ . Nous avons, en nous reportant à la formule (5), pour le rayon de courbure,

$$(6) \quad \rho = \frac{ds}{3 d\theta} = \frac{a}{3 \sqrt{\sin 2\theta}},$$

ou encore

$$(6') \quad \rho = \frac{a^2}{3r}.$$

5° *Quadrature*.—L'aire comprise entre la courbe  $Ox$  et un rayon vecteur quelconque a pour expression

$$(7) \quad A = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^\theta \sin 2\theta = \frac{a^2}{4} \sin^2 \theta.$$

Pour une boucle entière  $\theta = 90^\circ$ , d'où la valeur connue

$$A = \frac{a^2}{4}.$$

2. THÉORÈME DE SALADINI (1). — *Quelle est, parmi toutes les courbes comprises dans un même plan vertical ayant une même origine, celle pour laquelle un point pesant partant du repos en cette origine parcourt un arc de longueur quelconque dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.*

---

(1) *Memorie del Istituto nazionale italiano*, t. I, p. 49 (1804). Fuss, en 1815. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. IX), a donné, du théorème, une solution analytique plus simple que celle de Saladini.

Enfin, en 1857 (*Mémoires de la Société d'émulation du Doubs*), sans connaître les auteurs précédents, je me suis posé la question, et je l'ai résolue géométriquement. J'ai reproduit cette solution géométrique dans mon *Traité de Cinématique pure*, et dans mon *Traité de Mécanique générale*, t. I.



Soient

$Ox$  la verticale du point de départ  $O$ ;

$r$  le rayon vecteur d'un point quelconque  $m$  de la courbe;

$\theta$  l'angle que forme ce rayon avec  $Ox$ ;

$\theta_0$  la valeur de cet angle en  $O$ .

L'équation des forces vives appliquée au mouvement du point sur la courbe devient, en désignant par  $v$  la vitesse,

$$(8) \quad v^2 = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2} = 2gr \cos \theta,$$

d'où, pour le temps employé à parcourir l'arc  $Om$ ,

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2gr \cos \theta}} d\theta.$$

Le temps qui serait employé à parcourir la corde  $Om$  sera donné par

$$r = g \cos \theta \frac{t^2}{2},$$

d'où

$$(9) \quad t = \sqrt{\frac{2r}{g \cos \theta}}.$$

Égalant les deux valeurs de  $t$  que nous venons de trouver, il vient

$$2\sqrt{\frac{r}{\cos \theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{r \cos \theta}} d\theta;$$

d'où, par la différentiation par rapport à  $\theta$ ,

$$\frac{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} + \sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Si l'on élève au carré, on obtient

$$r \frac{d\theta}{dr} = \tan 2\theta,$$

ce qui est l'équation différentielle des lemniscates dont O est le centre, dont l'axe est incliné de  $45^\circ$  sur la verticale, et qui sont représentées d'une manière générale par l'équation (2).

En portant la valeur de  $r$  déduite de cette dernière équation dans la formule (9), on trouve, pour la durée du parcours de l'arc Om,

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \cos \theta}} \sqrt{\sin 2\theta} = 2 \sqrt{\frac{a}{g \sqrt{2}}} \sqrt[4]{\tan \theta}.$$

Si la courbe est l'axe d'un tuyau ayant une section infiniment petite, dans lequel le mobile est assujéti à circuler, on voit que ce mobile ne reviendra jamais au point de départ O, puisque  $t$  est infini pour  $\theta = 90^\circ$ .

Supposons maintenant que le tuyau soit remplacé par un canal ouvert à l'intérieur de la boucle, et soit N la pression exercée par le mobile sur la courbe; nous aurons, en remarquant que la composante normale de la pesanteur est  $g \sin 3\theta$ ,

$$N = \frac{v^2}{\rho} + g \sin 3\theta,$$

ou, en remplaçant  $\rho$ ,  $v^2$ ,  $r$  par leurs valeurs (6), (8) et (3),

$$N = g(6 \cos \theta \sin 2\theta + \sin 3\theta) = g \sin \theta (15 - 16 \sin^2 \theta).$$

La pression sera donc nulle au point de départ, croîtra avec  $\theta$  jusqu'au moment où l'on aura

$$\sin \theta = \frac{1}{4} \sqrt{5}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 53^\circ 59'.$$

Le maximum de  $N$  sera ainsi

$$N = \frac{g}{2} \sqrt{5} = 1,1187 g.$$

A partir de là,  $N$  décroîtra et deviendra nul pour

$$\sin \theta = \frac{1}{4} \sqrt{15}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 74^{\circ} 58'.$$

Cette valeur de  $\theta$  déterminera la position du *point d'échappement* ; le mobile arrivé en ce point quittera la courbe et, en vertu de la vitesse acquise et de la pesanteur, tombera dans l'intérieur de la boucle en décrivant une parabole.

J'espère pouvoir bientôt mettre en évidence, au moyen d'un appareil spécial, quelques-unes des propriétés mécaniques qui viennent d'être démontrées.

3. THÉORÈME DE M. O. BONNET (<sup>1</sup>). — *Quelle est, parmi toutes les courbures ayant une origine commune, celle pour laquelle un mobile partant de cette origine sans vitesse initiale, soumis à l'action d'une force dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la distance, décrirait un arc quelconque dans le même temps qu'il mettrait à parcourir la corde correspondante ?*

Soient

O le point de départ pris pour origine polaire ;

A le centre d'attraction ;

$r = Om$  un rayon vecteur d'un point quelconque  $m$  de la courbe ;

$\theta$  l'angle qu'il forme avec  $OA$  ;

$\theta_0$  sa valeur au point  $O$  ;

---

(<sup>1</sup>) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX : 1844.





tion (10), ce qui donne

$$\frac{dr^2}{d\theta^2} = \mu^2 (2lr \cos \theta - r^2),$$

d'où, par la différentiation par rapport à  $t$ ,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \mu^2 (l \cos \theta - r).$$

équation linéaire dont l'intégrale est, en remarquant que

$r = 0, \frac{dr}{dt} = 0$ , pour  $t = 0$ ,

$$(12) \quad r = l \cos \theta (1 - \cos \mu t),$$

d'où, pour la durée du parcours de la corde  $Om$ , qui doit être la même que celle qui est donnée par la formule (11),

$$(13) \quad t = \frac{1}{\mu} \arccos \left( 1 - \frac{r}{l \cos \theta} \right).$$

En égalant entre elles les valeurs (12) et (13), on obtient

$$\arccos \left( 1 - \frac{r}{l \cos \theta} \right) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}{2lr \cos \theta - r^2}} d\theta;$$

d'où, en différentiant par rapport à  $\theta$ ,

$$-r \sin \theta - \cos \theta \frac{dr}{d\theta} = \cos \theta \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

et, après avoir élevé au carré,

$$r \frac{d\theta}{dt} = \tan g 2\theta,$$

équation différentielle de deux systèmes de lemniscates ayant leur centre en  $O$  et dont les axes font un angle de  $45^\circ$  avec la droite  $OA$ .

4. *Démonstration géométrique du théorème précédent* (1). — Soient B la projection de A sur la direction de la droite Om, M l'une des intersections de la perpendiculaire élevée en m avec la circonférence décrite du point B comme centre, et dont le rayon est égal à BO.

En supposant  $\theta$  constant, le point m, en parcourant la droite OB avec une vitesse initiale nulle, obéit à l'accélération  $\mu^2 \times mB$  dirigée de m vers B; d'où il suit que m sera constamment la projection de M sur OB, en supposant que le rayon Bm soit animé autour de son centre de la vitesse angulaire  $\mu$ . On a ainsi

$$mB = MB \cos \mu t,$$

ou

$$l \cos \theta - r = l \cos \theta \cos \mu t,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (12).

En considérant maintenant  $t$  comme constant et  $\theta$  comme variable, on voit que cette équation représente un cercle passant par le point O, dont le centre C est situé sur Ox, et dont le rayon est

$$OC = \frac{l}{2} (1 - \cos \mu t).$$

Soient maintenant  $m'$  un point de la courbe infiniment voisin de m, n le point de la circonférence ci-dessus déterminé par la droite Om.

Le mobile met le même temps pour parcourir les cordes Om, On que s'il décrivait l'arc Om; le temps employé pour aller de O en  $m'$  doit donc être le même, que le mobile reste sur la courbe ou sur la corde, de

---

(1) Cette démonstration, dont je n'ai eu l'idée qu'au dernier moment, pourrait, peut-être, être simplifiée dans quelques détails.

sorte que l'on doit avoir

$$mm' = m'n,$$

d'où

$$\widehat{mm'n} = 180^\circ - 2\widehat{mnm'} = 180^\circ - 2(90^\circ - 2\theta) = 2\theta,$$

ce qui caractérise les lemniscates auxquelles nous sommes arrivé au numéro précédent.

### NOTE SUR LA RÉSOLUTION, AU MOYEN DE TABLEAUX GRAPHIQUES, DE CERTAINS PROBLÈMES DE COSMOGRAPHIE;

PAR M. ED. COLLIGNON,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Nous avons indiqué, par une Note insérée dans les *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, 1879, la construction d'un Tableau graphique qui fait connaître à vue les heures du lever et du coucher du Soleil en un point quelconque du globe et à une époque quelconque de l'année. Ce Tableau peut servir aussi à déterminer l'heure du passage du Soleil dans le plan vertical est-ouest. On peut enfin le compléter de manière à tenir compte de la durée du crépuscule. La présente Note a pour objet l'étude de ces nouveaux problèmes. Nous y avons joint quelques recherches sur la détermination du crépuscule de moindre durée en un point donné de la Terre.

#### I.

Soient (1)

O le point du globe où se fait l'observation : nous le supposons situé dans l'hémisphère boréal;

(1) Le lecteur est prié de faire les figures.

ON la tangente au méridien, dirigée vers le nord ;  
 OZ la verticale ascendante, dirigée vers le zénith Z ;  
 OE la tangente au parallèle, dirigée vers l'est ;  
 P le pôle boréal ;  
 L le point de l'horizon où le Soleil se lève ;  
 K le point où le Soleil rencontre le plan vertical ZE dirigé de l'ouest à l'est.

L'arc de grand cercle PN est la latitude  $\lambda$  du lieu.  
 L'arc PL = PK est le complément de la déclinaison D du Soleil au jour de l'observation.

L'angle ZPK =  $h$ , converti en temps, à raison de  $15^\circ$  par heure, est l'angle horaire cherché. Il fait connaître combien d'heures séparent le passage du Soleil au point K et son passage au méridien.

Le triangle sphérique PZK a pour côtés  $PZ = 90^\circ - \lambda$ ,  $PK = 90^\circ - D$ , et il est rectangle en Z. L'angle cherché  $h$  est compris entre les côtés PZ et PK ; il sera donné par l'équation

$$\text{tang PK} \cos h = \text{tang PZ},$$

ou bien

$$(1) \quad \cos h = \cot \lambda \text{ tang D}.$$

Si l'on cherche l'angle horaire  $H = ZPL$  qui correspond au lever du Soleil, pour le même lieu et le même jour, on aura

$$(2) \quad \cos H = - \text{tang } \lambda \text{ tang D}.$$

Pour passer de la première équation à la seconde, il suffit de changer  $h$  en  $H$ , et  $\cot \lambda$  en  $-\text{tang } \lambda$ , ce qui revient à changer  $\lambda$  en  $90^\circ - \lambda$  et  $h$  en  $180^\circ - H$ .

Les solutions de l'équation (2) sont données à vue par le Tableau graphique des levers et des couchers du Soleil. Le même Tableau fera connaître les solutions de l'équation (1), moyennant qu'on fasse subir aux données et à



l'inconnue les modifications convenables. Au lieu de prendre sur le Tableau l'horizontale qui correspond à la latitude donnée, on prendra l'horizontale qui correspond à la latitude complémentaire; on opérera comme si l'on voulait trouver l'heure du lever et du coucher du Soleil pour cette latitude au jour de l'observation, puis on substituera aux heures qu'on aura trouvées leurs différences avec  $12^h$ , ce qui équivaut à prendre les heures telles qu'elles sont fournies par le Tableau, sauf à permuter ensemble les mots *soir* et *matin*.

Par exemple, on veut savoir à quelle heure le Soleil traversera le plan vertical est-ouest le jour du solstice d'été, pour la latitude de  $60^\circ$ .

On prendra sur le Tableau la latitude complémentaire, c'est-à-dire  $30^\circ$ ; le Tableau montre que, pour cette latitude, le Soleil, au solstice d'été, se lève à  $5^h 5^m$  matin, et se couche à  $6^h 55^m$  soir (temps vrai). On en conclura immédiatement que le même jour, sous la latitude de  $60^\circ$ , le Soleil traverse le plan vertical est-ouest à  $6^h 55^m$  *du matin*, et qu'il le retraverse à  $5^h 5^m$  *du soir*, de sorte qu'il en éclaire pendant  $10^h 10^m$  la face méridionale. Ces résultats ont été obtenus à l'aide d'un Tableau où le cercle des heures a un diamètre de  $0^m, 10$  : l'erreur commise est de 2 minutes, environ; une telle approximation est plus que suffisante dans les problèmes usuels.

## II.

*Durée du crépuscule.* — Le Soleil éclaire le lieu de l'observation, non seulement quand il est levé, mais avant son lever et après son coucher, tant qu'il est au-dessus d'un cercle parallèle à l'horizon, mené au-dessous à une certaine distance angulaire  $\alpha$ , supposée connue.

Si l'on appelle  $L'$  le point où le Soleil rencontre ce cercle, qu'on pourrait appeler l'*horizon déprimé*, et

H' l'angle horaire ZPL', on aura pour déterminer H' l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} \cos(90^\circ + \alpha) \\ = -\sin \alpha = \sin D \sin \lambda + \cos D \cos \lambda \cos H', \end{cases}$$

fournie par le triangle ZPL', où ZL' est égal à  $90^\circ + \alpha$ .

L'angle horaire H du lever du Soleil est la valeur que prend l'angle H' quand on fait  $\alpha = 0$ ; la durée du crépuscule est la différence H' — H réduite en temps.

L'angle H est donné par le tableau graphique en fonction de  $\lambda$  et de D; pour en déduire H', observons qu'on a, à la fois,

$$\begin{aligned} \sin D \sin \lambda + \cos D \cos \lambda \cos H' &= -\sin \alpha, \\ \sin D \sin \lambda + \cos D \cos \lambda \cos H &= 0. \end{aligned}$$

Retranchant, il vient

$$(4) \quad \cos H' - \cos H = -\frac{\sin \alpha}{\cos D \cos \lambda}.$$

Cette relation fait connaître la correction qu'il faut faire subir à  $\cos H$  pour trouver  $\cos H'$ , correction toujours négative, puisque le crépuscule, augmentant toujours l'angle H, diminue son cosinus. Il suffira donc de déplacer vers la droite la verticale dont les intersections avec le cercle donnent les heures du lever et du coucher du Soleil, pour obtenir une verticale qui fera connaître, de même, les heures du commencement de l'aurore et de la fin du crépuscule. La même méthode s'appliquerait à une dépression quelconque,  $\alpha$ , de l'horizon apparent.

La valeur de cette correction est facile à calculer, ou mieux encore à construire. Soit A le centre d'un cercle de rayon égal à l'unité, du cercle du Tableau graphique par exemple; soit M le point du diamètre horizontal de ce cercle qui correspond à l'angle horaire H, en sorte

qu'on ait  $\cos H = AM$ , le segment  $AM$  portant avec lui son signe. Menons par le point  $A$  une ligne  $AN$  faisant avec le diamètre horizontal un angle  $NAM = D$ , puis par le même point une droite  $AP$ , faisant avec  $AN$  un angle  $PAN = \lambda$ , et avec  $AM$  un angle  $PAM = \lambda + D$ . Projetons  $M$  en  $m$  sur  $AN$ , et le point  $m$  en  $m'$  sur  $AP$ . Prenons sur  $AP$ , dans le sens  $Om'$ , une longueur  $m'n'$  égale à  $\sin \alpha$ ; puis relevons le point  $n'$  en  $n$  sur  $AM$ , en menant  $n'n$  perpendiculaire sur  $An'$ , et le point  $n$  en  $M'$  sur le diamètre horizontal, en menant  $nM'$  perpendiculaire sur  $An$ . Le point  $M'$  sera le point cherché, pied de la verticale qui correspond à  $\cos H'$ .

Un diagramme construit une fois pour toutes permet d'éviter cette construction.

Dans l'équation (4) faisons

$$x = \cos H - \cos H', \quad y = \cos D;$$

cette équation prendra la forme

$$xy = \frac{\sin \alpha}{\cos \lambda},$$

et représentera une série d'hyperboles, qu'on peut supposer rapportées à deux axes rectangulaires asymptotes de toutes ces courbes. Le dénominateur  $\cos \lambda$  est le paramètre qui définit chacune de ces hyperboles en particulier. Imaginons qu'on les ait construites pour diverses valeurs de la latitude  $\lambda$ , et qu'on ait pris pour échelle des abscisses  $x$  l'échelle qui sert à la construction du Tableau des heures du lever du Soleil; l'échelle des ordonnées  $y$  peut être prise arbitrairement. Si l'on trace sur cette nouvelle épure des horizontales  $y = \cos D$ , correspondant à différentes valeurs de la déclinaison  $D$ , les abscisses des points d'intersection de ces horizontales avec les hyperboles donneront, pour toutes les



latitudes  $\lambda$  inscrites sur l'épure, les valeurs de la correction  $x = \cos H - \cos H'$ , c'est-à-dire de la quantité dont doit être déplacée vers la droite la verticale correspondant à l'angle  $H$ , pour donner celle qui correspond à  $H'$ .

Une circonstance particulière simplifie beaucoup cette épure :  $y$ , représentant le cosinus de la déclinaison du Soleil, ne peut varier qu'entre les limites

$$y = \cos 23^{\circ}28' = 0,91729,$$

lorsque  $D$  atteint aux solstices ses limites extrêmes  $\pm 23^{\circ}28'$ , et  $y = 1$ , pour  $D = 0$ , aux équinoxes. Deux horizontales menées aux distances 0,917 et 1,000 de l'axe des abscisses limitent donc la région utile du diagramme et  $y$  déterminent une bande assez étroite pour qu'on puisse, sans erreur importante, substituer des droites aux arcs d'hyperbole qu'on aurait à  $y$  tracer. La fin du crépuscule et le commencement de l'aurore sont des phénomènes dont on ne peut définir l'époque avec précision, la nuit et le jour se succédant par une série de variations insensibles; aussi une rigueur absolue n'est-elle pas de mise dans de tels calculs, et peut-on faire sans inconvénient la substitution de droites aux hyperboles.

*Discussion de la formule.* — On évalue en général l'angle  $\alpha$  à  $18^{\circ}$  : c'est la limite extrême qui correspond à la plus grande durée du phénomène. C'est la valeur que nous adopterons dans ce qui suit. En pratique, s'il s'agit de déterminer la durée du jour effectif, il convient de réduire  $\alpha$  à moitié environ, et de le prendre égal à  $9^{\circ}$ , au lieu de  $18^{\circ}$ . Cette évaluation résulte des observations faites sous les hautes latitudes où le Soleil se couche, et où néanmoins il n'y a plus de nuit à l'époque du solstice d'été. C'est vers la latitude de  $57^{\circ}$  que ce phénomène de nuits complètement claires commence à être constaté.



En adoptant cette valeur pour la latitude, on devra avoir à la fois

$$H' = 180^\circ, \quad \lambda = 57^\circ, \quad D = + 23^\circ 28',$$

d'où résulte pour  $\alpha$

$$\alpha = 90^\circ - D - \lambda = 9^\circ 32',$$

qu'on peut réduire à  $9^\circ$  dans les applications usuelles. Les sinus de  $9^\circ$  et de  $18^\circ$  étant sensiblement dans le rapport de 1 à 2, on voit que la correction  $\cos H' - \cos H$ , calculée pour  $\alpha = 18^\circ$ , devra être réduite à moitié si l'on fait  $\alpha = 9^\circ$ ; elle devrait être réduite aux  $\frac{7}{13}$  de sa valeur si l'on faisait  $\alpha = 9^\circ 32'$ . Généralement le diagramme des corrections, construit pour une valeur de l'angle  $\alpha$ , pourra s'appliquer à toute autre valeur de cet angle moyennant une réduction des abscisses  $x$  dans le rapport des sinus des deux valeurs de l'angle  $\alpha$ .

Reprenons les formules

$$(2) \quad \cos H = - \tan \lambda \tan D,$$

$$(5) \quad \cos H' = \cos H - \frac{\sin \alpha}{\cos \lambda \cos D},$$

où nous ferons  $\alpha$  égal à  $18^\circ$ ,  $\lambda$  positif et  $< 90^\circ$ , et où nous ferons varier  $D$  de  $- 23^\circ 28'$  à  $+ 23^\circ 28'$ .

L'angle  $H$  sera réel si  $\lambda$  est moindre que le complément de la plus grande valeur de  $D$ , c'est-à-dire entre les limites  $\lambda = 0^\circ$  et  $\lambda = 66^\circ 32'$ , qui correspondent à l'équateur et au cercle polaire. Pour les valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $66^\circ 32'$  et  $90^\circ$ ,  $H$  devient imaginaire, et le Soleil ne se couche plus, ou ne se lève plus, pour certaines valeurs de la déclinaison  $D$ .

L'angle  $H'$ , pour une latitude donnée, sera réel si  $\cos H'$  est compris entre  $-1$  et  $+1$ , et les valeurs extrêmes de la déclinaison  $D$  qui laissent réel l'angle  $H'$  s'obtiendront en remplaçant dans l'équation (5)  $\cos H'$

par ces limites. Il vient, en désignant par  $D'$  et  $D''$  les valeurs cherchées de la déclinaison, les deux équations suivantes,

$$-\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} D' - \frac{\sin \alpha}{\cos \lambda \cos D'} = 1$$

et

$$-\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} D'' - \frac{\sin \alpha}{\cos \lambda \cos D''} = -1,$$

ou bien

$$\cos(\lambda - D') = -\sin \alpha$$

et

$$\cos(\lambda + D'') = \sin \alpha$$

équations qui donnent

$$\lambda + D'' = 90^\circ - \alpha \quad \text{ou} \quad D'' = 90^\circ - \lambda - \alpha = 72^\circ - \lambda$$

et

$$\pm(\lambda - D') = 90^\circ + \alpha, \quad D' = \lambda \mp (90^\circ + \alpha) = \lambda \mp 108^\circ.$$

Substituant ensuite à  $D''$  et à  $D'$  les valeurs extrêmes de  $D$ , on aura les limites correspondantes de  $\lambda$ ; on a d'abord

$$\lambda = 72^\circ - D'' = \begin{cases} 72^\circ - 23^\circ 28' = 48^\circ 32' \\ 72^\circ + 23^\circ 28' = 95^\circ 28' > 90^\circ. \end{cases}$$

La première valeur est admissible pour  $\lambda$ . La seconde, supérieure à  $90^\circ$ , doit être rejetée. On voit qu'à partir de la latitude de  $48^\circ 32'$ , c'est-à-dire à peu près la latitude de Paris, jusqu'au pôle, le crépuscule rejoint l'aurore lorsque la déclinaison du Soleil est voisine de sa valeur maximum.

De même on aura, pour la seconde limite,

$$\lambda = D' \pm 108^\circ = \begin{cases} + 23^\circ 28' + 108^\circ & \text{inadmissible} > 90^\circ \\ - 23^\circ 28' + 108^\circ = 84^\circ 32' \\ + 23^\circ 28' - 108^\circ & \text{inadmissible} < 0^\circ \\ - 23^\circ 28' - 108^\circ & \text{inadmissible} < 0^\circ. \end{cases}$$

Jusqu'à la latitude de  $84^{\circ}32'$ , il y a un crépuscule chaque jour de l'année; plus près du pôle, la nuit est complète dès que le Soleil s'approche suffisamment du solstice d'hiver.

Cette discussion fait ressortir deux latitudes particulières,  $48^{\circ}32'$  et  $84^{\circ}32'$ ; la première indique le point du globe où le crépuscule peut rejoindre l'aurore au moins un jour par an; la seconde, le point du globe où il y a absence de crépuscule et d'aurore au moins un jour par an. Entre le cercle polaire  $66^{\circ}32'$  et la latitude de  $84^{\circ}32'$ , le Soleil, constamment couché une fois qu'il est parvenu dans l'hémisphère austral, éclaire encore chaque jour l'horizon du lieu par ses rayons réfractés; le jour est crépusculaire.

### III.

*Crépuscule minimum.* — La durée  $H' - H$  du crépuscule variant, en général, avec la déclinaison  $D$  du Soleil, proposons-nous de chercher la déclinaison  $D$  qui rend minimum cette durée, en un point du globe donné par sa latitude  $\lambda$  (<sup>1</sup>).

Nous aurons à la fois les équations

$$(6) \quad \sin D \sin \lambda + \cos D \cos \lambda \cos H' = -\sin \alpha,$$

$$(7) \quad \sin D \sin \lambda + \cos D \cos \lambda \cos H = 0,$$

où  $D$ ,  $H$  et  $H'$  sont des variables que nous ne supposerons d'abord assujetties à aucune restriction. La condition du minimum de la différence  $H' - H$  est

$$dH' = dH.$$

---

(<sup>1</sup>) On trouvera la solution géométrique de cette question dans *'Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital, exemple XIII § 61

Différentions les équations (6) et (7) en laissant  $\alpha$  et  $\lambda$  constants. Il viendra

$$\begin{aligned}\sin\lambda \cos D dD - \cos\lambda \cos H' \sin D dD - \cos D \cos\lambda \sin H' dH' &= 0, \\ \sin\lambda \cos D dD - \cos\lambda \cos H \sin D dD - \cos D \cos\lambda \sin H dH &= 0.\end{aligned}$$

Entre ces deux équations, éliminons le rapport  $\frac{dH}{dD}$ , et nous aurons, pour la condition du minimum,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \cos H'}{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \cos H} \\ = \frac{\cos D \cos\lambda \sin H'}{\cos D \cos\lambda \sin H} = \frac{\sin H'}{\sin H}. \end{cases}$$

De cette équation chassons  $\cos H'$  et  $\cos H$  au moyen des équations (6) et (7). On obtient

$$\begin{cases} \frac{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \left( \frac{-\sin\alpha - \sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda} \right)}{\sin\lambda \cos D - \cos\lambda \sin D \left( -\frac{\sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda} \right)} = \frac{\sin H'}{\sin H} \\ = \frac{\sin\lambda \cos^2 D + \sin D \sin\alpha + \sin^2 D \sin\lambda}{\sin\lambda \cos^2 D + \sin^2 D \sin\lambda} = \frac{\sin\lambda + \sin D \sin\alpha}{\sin\lambda}. \end{cases}$$

Il reste à éliminer  $H$  et  $H'$  entre les équations (6), (7) et (9). L'équation finale sera la relation cherchée entre  $D$  et  $\lambda$ .

Élevons au carré l'équation (9), et remplaçons  $\sin^2 H$  et  $\sin^2 H'$  par  $1 - \cos^2 H$  et  $1 - \cos^2 H'$ ; il viendra

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin\lambda + \sin D \sin\alpha}{\sin\lambda} \right)^2 &= \frac{1 - \cos^2 H'}{1 - \cos^2 H} \\ &= \frac{1 - \left( \frac{\sin\alpha + \sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda} \right)^2}{1 - \left( \frac{\sin D \sin\lambda}{\cos D \cos\lambda} \right)^2} \end{aligned}$$



ou bien

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 - \left( \frac{\sin \alpha + \sin D \sin \lambda}{\cos D \cos \lambda} \right)^2 \\ & = \left( 1 + \frac{\sin D \sin \alpha}{\sin \lambda} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\sin D \sin \lambda}{\cos D \cos \lambda} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Avant de réduire à sa plus simple expression cette équation (10), observons qu'elle est plus générale que l'équation (9), puisqu'elle résulte de l'élévation de celle-ci au carré; elle comprend, outre l'équation (9),

$$\frac{\sin \lambda + \sin D \sin \alpha}{\sin \lambda} = \frac{\sin H'}{\sin H},$$

l'équation

$$\frac{\sin \lambda + \sin D \sin \alpha}{\sin \lambda} = - \frac{\sin H'}{\sin H},$$

qui est étrangère à la question.

Multiplions l'équation (10) par le produit  $\cos^2 D \cos^2 \lambda$ . Le premier membre devient, en développant le carré,

$$\begin{aligned} \cos^2 D \cos^2 \lambda - (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin D \sin \lambda + \sin^2 D \sin^2 \lambda) \\ = 1 - \sin^2 D - \sin^2 \lambda - \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin D \sin \lambda. \end{aligned}$$

La seconde parenthèse du second membre, transformée de même, se déduira du premier membre en y faisant  $\alpha = 0$ , ce qui donne

$$1 - \sin^2 D - \sin^2 \lambda;$$

cette fonction doit être multipliée par le facteur

$$1 + 2 \frac{\sin D \sin \alpha}{\sin \lambda} + \frac{\sin^2 D \sin^2 \alpha}{\sin^2 \lambda};$$

le produit est

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 D - \sin^2 \lambda + \frac{2 \sin D \sin \alpha}{\sin \lambda} - 2 \frac{\sin^3 D \sin \alpha}{\sin \lambda} \\ - 2 \sin D \sin \alpha \sin \lambda \\ + \frac{\sin^2 D \sin^2 \alpha}{\sin^2 \lambda} - \frac{\sin^4 D \sin^2 \alpha}{\sin^2 \lambda} - \sin^2 D \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

et l'équation (10) devient, après réduction et après la multiplication par  $\frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \alpha}$ , inverse du coefficient de  $\sin^4 D$ ,

$$(11) \quad \begin{cases} \sin^4 D + \frac{2 \sin \lambda}{\sin \alpha} \sin^3 D \\ - \cos^2 \lambda \sin^2 D - \frac{2 \sin \lambda}{\sin \alpha} \sin D - \sin^2 \lambda = 0, \end{cases}$$

équation du quatrième degré en  $\sin D$ ; elle a ses quatre racines réelles, et il est aisé de les obtenir.

On aperçoit sur-le-champ qu'elle admet pour racines  $+1$  et  $-1$ ; on a, en effet, en remplaçant  $\sin D$  par  $\pm 1$ ,

$$1 \pm \frac{2 \sin \lambda}{\sin \alpha} - \cos^2 \lambda \mp \frac{2 \sin \lambda}{\sin \alpha} - \sin^2 \lambda = 0,$$

ce qui se réduit à une identité. On pourra donc diviser le polynôme de l'équation (11) par le facteur  $\sin^2 D - 1$ , ce qui amène l'équation du second degré

$$(12) \quad \sin^2 D + \frac{2 \sin \lambda}{\sin \alpha} \sin D + \sin^2 \lambda = 0.$$

On en déduit

$$\sin D = -\frac{\sin \lambda}{\sin \alpha} \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \alpha} - \sin^2 \lambda} = -\sin \lambda \left( \frac{1 \pm \cos \alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Si l'on prend le signe supérieur, il vient

$$\sin D = -\sin \lambda \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \lambda \cot \frac{\alpha}{2};$$

et avec le signe inférieur,

$$\sin D = -\sin \lambda \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Les quatre racines de l'équation (11) sont donc

$$-1, +1, -\sin \lambda \cot \frac{\alpha}{2}, -\sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Les deux premières racines font la déclinaison égale à  $\pm 90^\circ$ , et placent le Soleil à l'un des pôles; elles rendent imaginaires les angles  $H$  et  $H'$ , et ne donnent pas une solution du problème. Restent les deux racines

$$-\sin \lambda \cot \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad -\sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2},$$

qui satisfont toutes deux à l'équation (12), et dont l'une se déduit de l'autre en changeant  $\alpha$  en  $180^\circ - \alpha$ ; ce qui résulte en effet de ce que l'angle  $\alpha$  entre dans les équations (11) et (12) par son sinus, lequel correspond aussi bien à l'angle donné  $\alpha$  qu'à son supplément  $180^\circ - \alpha$ .

Ces deux racines satisfont à l'équation (11), mais elles ne satisfont pas toutes deux à l'équation (9) qui est la traduction exacte du problème. Substituons, en effet, à  $\sin D$  dans l'équation (9) la valeur  $-\sin \lambda \cot \frac{\alpha}{2}$ , puis la valeur  $-\sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2}$ ; il viendra

$$\begin{aligned} \frac{\sin H'}{\sin H} &= \frac{\sin \lambda + \left( -\sin \lambda \cot \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha}{\sin \lambda} \\ &= 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = -\cos \alpha \end{aligned}$$

quand on adopte la première racine, et

$$\begin{aligned} \frac{\sin H'}{\sin H} &= \frac{\sin \lambda + \left( -\sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha}{\sin \lambda} \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha, \end{aligned}$$

quand on adopte la seconde.

Or  $\cos \alpha$  est toujours positif; les angles  $H$  et  $H'$ , s'ils sont réels, sont toujours compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ ; leurs

sinus sont positifs, et par conséquent la seconde racine n'entraîne aucune impossibilité, tandis que la première, au lieu de satisfaire à l'équation (9), satisfait à la relation conjuguée

$$\frac{\sin \lambda + \sin D \sin \alpha}{\sin \lambda} = - \frac{\sin H'}{\sin H},$$

et est étrangère à la question.

En définitive, le problème n'a qu'une solution, savoir :

$$(13) \quad \sin D = - \sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2},$$

toujours admissible, puisque  $\sin \lambda$  est au plus égal à l'unité, et que  $\tan \frac{\alpha}{2}$ , égal à  $\tan 9^\circ$ , est moindre que la plus grande valeur absolue qu'on puisse attribuer à  $\sin D$ ; et pour le crépuscule minimum, l'angle  $H'$  est donné en fonction de  $H$  par la relation

$$(14) \quad \sin H' = \sin H \cos \alpha,$$

avec la condition d'être plus grand que  $H$ , ce qui fait disparaître toute ambiguïté dans la détermination de cet angle  $H'$ .

De ces formules il est aisé de déduire la valeur de  $\sin \frac{H' - H}{2}$ , lorsque la durée du crépuscule est minimum.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \cos H' - \cos H &= - 2 \sin \frac{H' + H}{2} \sin \frac{H' - H}{2} \\ &= - \frac{\sin \alpha}{\cos \lambda \cos D}, \end{aligned}$$

$$\sin H' + \sin H = 2 \sin \frac{H' + H}{2} \cos \frac{H' - H}{2} = \sin H (1 + \cos \alpha).$$



Divisant la première équation par la seconde, il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{H' - H}{2} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \lambda \cos D \sin H (1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\cos \lambda \cos D \sin H}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans cette relation  $\cos D$  par sa valeur

$$\sqrt{1 - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

et  $\sin H$  par

$$\sqrt{1 - \cos^2 H}$$

ou bien par

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 D} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}}, \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{H' - H}{2} &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\cos \lambda \sqrt{1 - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\cos \lambda \sqrt{1 - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \operatorname{tang}^2 \lambda)}} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\cos \lambda \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}}, \end{aligned}$$

puisque  $1 + \operatorname{tang}^2 \lambda = \frac{1}{\cos^2 \lambda}$

Cette équation donne  $\frac{H' - H}{2}$  par sa tangente. Mais il est plus simple de chercher son sinus : or on en déduit

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \sin \frac{H' - H}{2} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \lambda \left(1 - \operatorname{tang}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}\right) (1 - \sin^2 \lambda)}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \lambda}. \end{aligned} \right.$$

Pour que le crépuscule minimum soit réel, il faut et il suffit que  $\sin \frac{H' - H}{2}$  soit moindre que l'unité, ou que  $\cos \lambda$  soit plus grand que  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , ou enfin que l'on ait

$$\lambda < 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire, pour  $\alpha = 18^\circ$ ,  $\lambda < 81^\circ$ ; de sorte qu'il n'y a de crépuscule minimum, au point de vue analytique, que si la latitude est au plus égale à  $81^\circ$ .

Des considérations géométriques font retrouver facilement les équations (14) et (15).

Considérons sur la sphère les deux triangles sphériques ZPL et ZPL', qui ont pour côtés, l'un

$$ZP = 90^\circ - \lambda,$$

$$ZL = 90^\circ,$$

$$PL = 90^\circ - D,$$

et l'autre

$$ZP = 90^\circ - \lambda,$$

$$ZL' = 90^\circ + \alpha,$$

$$PL' = 90^\circ - D;$$

l'angle  $H$  est, dans le premier, opposé au côté  $ZL$ , et l'angle  $H'$ , dans le second, est opposé au côté  $ZL'$ . Désignons par  $L$  et  $L'$  les angles des deux triangles opposés au côté  $ZP$ . Il viendra

$$\cos L = \frac{\sin \lambda}{\cos D},$$

$$\cos L' = \frac{\sin \lambda + \sin \alpha \sin D}{\cos \alpha \cos D},$$

ou bien, si l'on remplace  $\sin D$  par  $-\sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2}$ ,

$$\cos L' = \frac{\sin \lambda \left( 1 - \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \alpha \cos D} = \frac{\sin \lambda}{\cos D} = \cos L,$$

puisque  $1 - \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$ . On en déduit  $L = L'$ .

Sur le côté  $ZL'$ , opposé à l'angle  $H'$ , prenons  $ZZ' = \alpha$ , et menons l'arc de grand cercle  $PZ'$ . Les deux triangles  $PZL$ ,  $PZ'L'$  auront un angle égal,  $L = L'$ , compris entre côtés égaux chacun à chacun,

$$L'Z' = 90^\circ = LZ, \quad L'P = LP;$$

donc l'un peut être considéré comme étant une seconde position de l'autre, qu'on aurait fait tourner sur la sphère autour du point  $P$ , dans le sens convenable, d'un angle  $ZPZ' = LPL' = H' - H$ . Le triangle  $ZPZ'$  a donc le côté  $PZ$  égal au côté  $PZ'$ , et l'angle compris est égal à  $H' - H$ . L'arc de grand cercle  $PI$ , qui coupe cet angle en deux parties égales, partage la base en deux segments égaux, et le triangle en deux triangles rectangles

en I, qui ont pour hypoténuse  $PZ = PZ' = 90^\circ - \lambda$  et pour côté de l'angle droit  $ZI = Z'I = \frac{\alpha}{2}$ . L'angle opposé à ce côté est  $\frac{H' - H}{2}$ , et l'on retrouve l'équation (15)

$$\sin \frac{H' - H}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \lambda}.$$
 La construction précédente est connue sous le nom de *construction de Cagnoli*.

L'équation (14) résulte de la comparaison des deux triangles ZLP et ZL'P, pour lesquels la proportion des sinus donne les relations

$$\frac{\sin H'}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{\sin L'}{\sin(90^\circ - \lambda)} = \frac{\sin L}{\cos \lambda},$$

puisque

$$\sin L' = \sin L.$$

Mais

$$\sin H = \frac{\sin L}{\cos \lambda};$$

donc

$$\sin H' = \sin H \sin(90^\circ + \alpha) = \sin H \cos \alpha,$$

c'est-à-dire l'équation (14).

La recherche du crépuscule minimum se ramène facilement à des constructions géométriques.

Décrivons un cercle d'un point C comme centre avec un rayon égal à l'unité; menons par le point C deux diamètres rectangulaires AA', BB'. Prenons sur le quadrant AB un arc AM égal à la latitude  $\lambda$ ; projetons le point M en N sur le diamètre BB', et par le point N menons NP, faisant avec BB' l'angle PNB' égal à  $\frac{\alpha}{2}$ . Soit P l'intersection de cette droite avec le premier diamètre CA. Nous avons

$$CP = CN \times \tan \frac{\alpha}{2} = \sin \lambda \tan \frac{\alpha}{2}.$$



Donc CP est, en valeur absolue, le sinus de la déclinaison D qui assure le moindre crépuscule. Il suffit de mener par le point P une parallèle PQ à BB' jusqu'à la rencontre de la circonférence, pour avoir en B'Q un arc égal à la valeur absolue de D. Quant aux signes, on saura que D et  $\lambda$  sont toujours de signes contraires.

Connaissant D, on pourra en déduire la correction de  $\cos H$  et se servir des diagrammes pour déterminer H'. On peut aussi se rappeler que, lorsque le crépuscule est minimum,  $\sin H' = \sin H \cos \alpha$ . Il n'y aura donc qu'à projeter le sinus de l'angle H, donné par le diagramme, sur une oblique faisant, avec les verticales, un angle égal à  $\alpha$ ; la projection ramenée à être verticale, et déplacée ensuite parallèlement vers la droite jusqu'à ce qu'elle devienne une ordonnée du cercle, fera connaître la valeur de l'angle H' cherché.

### SOLUTION D'UNE QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1879;

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 182);

PAR M. GAMBEY.

*Un point pesant M, assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution dont l'axe est vertical est attiré par un centre placé au sommet S du cône : l'attraction est proportionnelle à une fonction inconnue de la distance MS :*

1<sup>o</sup> *Trouver quelle doit être cette fonction pour que la trajectoire du point M soit plane.*

2<sup>o</sup> *Étudier, dans ces conditions, le mouvement de la projection du point M sur un plan horizontal.*

3<sup>o</sup> *Déterminer la réaction du cône, pour une position quelconque du point M sur sa trajectoire.*

Je suppose le point  $M$  sur la nappe inférieure du cône et je prends des axes rectangulaires se coupant au sommet, l'axe des  $z$  étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur.

Soient  $M_1$  la projection du point  $M$  sur le plan des  $xy$ , et  $\varphi$  l'angle de  $SM_1$  avec  $Sx$ , cet angle étant compté positivement de l'axe des  $x$  vers l'axe des  $y$ .

Je pose encore

$$OM = \rho, \quad OM_1 = r, \quad MO \angle = \theta,$$

d'où les relations

$$z = \rho \cos \theta, \quad r = \rho \sin \theta.$$

Le principe des forces vives donne immédiatement

$$(1) \quad dv^2 = -2f(\rho)d\rho + 2gz,$$

$f(\rho)$  étant une fonction inconnue de  $\rho$ .

Le principe des aires ayant lieu pour la projection du mouvement sur le plan des  $xy$ , on a encore

$$(2) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \lambda.$$

Pour que la trajectoire du point  $M$  soit plane, il faut et il suffit que sa projection sur le plan des  $xy$  soit une conique ayant le point  $S$  pour foyer.

En supposant que le plan de la trajectoire du point  $M$  soit perpendiculaire au plan des  $zx$ , ce qui est toujours permis, et qu'en outre le sens du mouvement soit celui qui fait croître l'angle  $\varphi$ , l'équation de la projection sur le plan des  $xy$  sera

$$(3) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Les paramètres  $p$  et  $e$  peuvent être supposés donnés ou déterminés en fonction des données initiales du mouvement.

La vitesse  $v$  du point M sur le cône s'exprime par

$$(4) \quad v^2 = \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}.$$

Les relations (1), (2), (3) et (4) vont nous servir à déterminer la fonction  $f(\rho)$ .

D'abord l'équation (4) devient, si l'on tient compte de l'équation (2),

$$v^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{\lambda^2}{r^2}.$$

Mais de l'équation de la conique on déduit, en ayant encore égard à l'équation (2),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \lambda \sin \varphi}{p}.$$

Donc

$$(5) \quad v^2 = \frac{e^2 \lambda^2}{p^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \varphi + \frac{\lambda^2}{r^2},$$

et

$$dv^2 = \frac{e^2 \lambda^2}{p^2 \sin^2 \theta} d \sin^2 \varphi - \frac{2 \lambda^2}{r^3} dr.$$

Mais de l'équation (3) on déduit encore

$$d \sin^2 \varphi = - \frac{2p}{e^2} \frac{dr}{r^2} + \frac{2p^2}{e^2} \frac{dr}{r^3}.$$

Par suite,

$$dv^2 = - \frac{2 \lambda^2}{p \sin^2 \theta} \frac{dr}{r^2} + 2 \lambda^2 \cot^2 \theta \frac{dr}{r^3},$$

ou bien

$$dv^2 = - \frac{2 \lambda^2}{p \sin^3 \theta} \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{2 \lambda^2 \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \frac{d\rho}{\rho^3}.$$

En comparant cette équation avec l'équation (1), on en déduit

$$f(\rho) = g \cos \theta + \frac{\lambda^2}{p \sin^3 \theta} \frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \frac{1}{\rho^3}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{2\lambda^2}{p \sin^3 \theta} \frac{1}{\rho} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \frac{1}{\rho^2} + \mu \\ &= \frac{2\lambda^2}{p \sin^2 \theta} \frac{1}{r} - \lambda^2 \cot^2 \theta \frac{1}{r^2} + \mu, \end{aligned}$$

$\mu$  étant une constante.

Déterminons maintenant les constantes  $\lambda$  et  $\mu$ . Soient  $v_0$  la vitesse initiale du mobile M sur le cône, et  $r_0$  la valeur initiale de  $r$ ; nous aurons d'abord

$$v_0^2 = \frac{2\lambda^2}{p \sin^2 \theta} \frac{1}{r_0} - \lambda^2 \cot^2 \theta \frac{1}{r_0^2} + \mu,$$

et, comme la valeur (5) de  $v^2$  devient, pour  $\varphi = \varphi_0$ , valeur initiale de  $\varphi$ , égale à  $\frac{\lambda^2 e^2}{p^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \varphi_0 + \frac{\lambda^2}{r_0^2}$ , il en résulte cette autre relation

$$v_0^2 = \frac{\lambda^2}{r_0^2} + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \varphi_0.$$

Éliminant entre elles le rayon vecteur initial par la relation  $r_0 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0}$  et la vitesse  $v_0^2$ , il vient

$$p^2 \mu \sin^2 \theta = \lambda^2 (e^2 - 1),$$

équation qui peut remplacer l'une des deux précédentes.

On voit que, pour  $e < 1$ ,  $= 1$ ,  $> 1$ , on a

$$\mu < 0, \quad = 0, \quad > 0$$

et qu'on a

$$\lambda^2 = v_0^2 r_0^2, \quad \mu = v_0^2 r_0^2 \frac{e^2 - 1}{p^2 \sin^2 \theta}.$$

Étudions maintenant le mouvement du point M, sur



le plan des  $xy$ . Soit  $w$  la vitesse de ce point; nous aurons

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2} \sin^2 \varphi = \frac{\lambda^2}{p^2} (1 + e \cos \varphi)^2 + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2} \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$w^2 = \frac{\lambda^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \varphi).$$

Comme nous avons

$$v^2 = \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda^2 e^2}{p^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \varphi,$$

il en résulte

$$v^2 - w^2 = \frac{e^2 \lambda^2 \cot^2 \theta}{p^2} \sin^2 \varphi.$$

Donc la vitesse  $w$  est toujours plus petite que  $v$ , excepté pour  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$ ; alors  $w = v$ .

En supposant  $e \leq 1$ ,  $w$  ne peut s'annuler; donc, sur l'ellipse ou sur l'hyperbole, le mouvement aura toujours lieu dans le même sens.

Mais sur la parabole on aura  $w = 0$  pour  $\varphi = \pi$ . Comme le rayon vecteur sera alors infini, on en conclut que sur la parabole le mouvement aura aussi toujours lieu dans le même sens.

Le maximum de  $w^2$  est donné par  $\varphi = 0$ , et son minimum par  $\varphi = \pi$ .

Cherchons à exprimer  $\varphi$  en fonction du temps. Nous avons

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \lambda;$$

mais de

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

nous déduirons

$$r^2 = \frac{p^2}{(1 + e \cos \varphi)^2},$$

et, en multipliant par  $\frac{d\varphi}{dt}$ ,

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p^2 \frac{d\varphi}{dt}}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \lambda,$$

d'où

$$\frac{p^2 d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \lambda dt.$$

Pour intégrer, il faudrait considérer les trois cas de  $e < 0$ ,  $e > 0$  et  $e = 0$ . Nous nous occuperons spécialement du cas de l'ellipse et de celui de la parabole.

1°  $e < 0$ . La conique est une ellipse.

Posons

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2},$$

d'où

$$d\varphi = \sqrt{1-e^2} \frac{du}{1-e \cos u} \quad \text{et} \quad 1 + e \cos \varphi = \frac{1-e^2}{1-e \cos u}.$$

Substituant et intégrant, il vient

$$\lambda t = a^2 \sqrt{1-e^2} (u - e \sin u) + \text{const.}$$

Supposons que, pour  $t = 0$ , on ait  $\varphi = \varphi_0$  et  $u = u_0$ , il en résultera

$$\lambda t = a^2 \sqrt{1-e^2} (u - u_0 - e \sin u + e \sin u_0),$$

ce qui donne l'angle  $u$ , et par suite l'angle  $\varphi$ , en fonction du temps.

Si l'on fait  $u = 2\pi + u_0$ , la formule devient

$$\lambda T = 2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}.$$

Or  $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$  est l'expression de l'aire de l'ellipse. En l'appelant  $A$ , on a, pour le temps mis par le point  $M_1$  à parcourir l'ellipse entière,  $T = \frac{2A}{\lambda}$ ,  $\lambda$  ayant, comme cela a été dit, la valeur  $v_0 r_0$ .

2°  $e > 1$ . *Cas de l'hyperbole.* On intègre en posant

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tang} \frac{u}{2},$$

et l'on obtient

$$\lambda t = a^2 \sqrt{e^2 - 1} \left[ e \operatorname{tang} u + \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) \right] + \text{const.}$$

3°  $e = 1$ . *Cas de la parabole.* On a alors

$$\frac{p^2 d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = \lambda dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^2 d\varphi}{4 \cos^4 \frac{\varphi}{2}} = \lambda dt.$$

En posant  $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = v$ , il vient  $d\varphi = \frac{2dv}{1+v^2}$ , d'où

$$2\lambda dt = p^2(1+v^2)dv,$$

$$2\lambda t = p^2 v + \frac{p^2 v^3}{3} + \text{const.}$$

$$= p^2 \left( \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{\varphi}{2} \right) + \text{const.}$$

Si, pour  $\varphi = 0$ , on a  $t = 0$ , la constante est nulle, et il vient simplement

$$t = \frac{p^2}{2\lambda} \left( \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Pour  $\varphi = \pi$ ,  $t = \infty$ .

Il reste à calculer la réaction du cône. Soit R cette réaction. Pour la déterminer, on peut se servir de l'équation du mouvement le long de l'axe des  $z$ . Cette équation est la suivante

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f(\varphi) \frac{z}{\varphi} - R \sin \theta + g.$$

En y substituant les valeurs de  $\rho$ ,  $f(\rho)$  et  $\frac{d^2 z}{dt^2}$  en fonction de  $r$ , on obtient

$$R = g \sin \theta - \frac{\lambda^2}{r^3} \cos \theta.$$

## CORRESPONDANCE.

1. *Sur une nouvelle propriété de la chaînette.* (Extrait d'une Lettre adressée à M. Gerono par M. H. Resal.)

Soient

$m$  le paramètre d'une chaînette ou l'ordonnée de son sommet A;

$\alpha$ , l'inclinaison sur  $Ox$  de la tangente en un point M de la courbe;

M' le symétrique de M par rapport à  $Oy$ ;

I, I' les projections de M et M' sur  $Ox$ .

Le théorème dont il s'agit consiste en ce que *le centre de gravité de l'aire MII'M' se trouve au milieu de l'ordonnée du centre de gravité de l'arc M'AM*  $= 2s_1$ .

Si  $s$  est l'arc de la courbe mesuré à partir de A et terminé en un point  $(x, y)$  où la tangente est inclinée de l'angle  $\alpha$  sur  $Ox$ , on a les formules connues

$$s = m \tan \alpha, \quad ds = m \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad y = \frac{m}{\cos \alpha},$$

$$dx = m \frac{d\alpha}{\cos \alpha},$$

$$\text{aire } AOMI = ms_1.$$

Soient  $y'$ ,  $y''$  les ordonnées des centres de gravité de



l'arc M'AM et de l'aire MII'M'. On a évidemment

$$s_1 y' = \int_0^{\alpha_1} m \frac{dx}{\cos^2 \alpha} \frac{m}{\cos \alpha} = m^2 \int_0^{\alpha_1} \frac{dx}{\cos^3 \alpha},$$

$$ms_1 y'' = \int_0^{\alpha_1} \frac{m}{\cos \alpha} m \frac{dx}{\cos \alpha} \frac{1}{2} \frac{m}{\cos \alpha} = \frac{m^3}{2} \int_0^{\alpha_1} \frac{dx}{\cos^3 \alpha},$$

d'où

$$y'' = \frac{y'}{2},$$

ce qu'il fallait établir.

La détermination de l'intégrale dont dépend  $y'$  ou  $y''$  n'offre aucun intérêt. Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'on a

$$\int_0^{\alpha_1} \frac{dx}{\cos^3 \alpha} = \log \left( \tan \alpha_1 + \frac{1}{\cos \alpha_1} \right) + \frac{\sin \alpha_1}{\cos^3 \alpha_1}.$$

2. Nous avons reçu plusieurs solutions analytiques de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1882. Nous les ferons connaître dans un prochain numéro.

## COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880

[ FIN (1) ].

Rennes.

*Composition d'Analyse.* — Intégration de l'expression

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

dans laquelle  $x, y, z$  sont trois variables indépendantes

(1) *Nouvelles Annales*, 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 465.

et  $X, Y, Z$  trois fonctions données de ces variables. Prouver que, si l'expression est une différentielle exacte, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \left( X + Y \frac{dy}{dx} + Z \frac{dz}{dx} \right) dx,$$

dans laquelle on regarde  $y$  et  $z$  comme des fonctions de  $x$ , est indépendante de ces fonctions, pourvu que leurs valeurs limites soient toujours les mêmes.

*Composition de Mécanique.* — Un mobile sollicité par une force dirigée vers un point fixe et fonction de sa distance à ce point est observé par une personne placée au centre d'action, perpendiculairement au plan qui contient ce centre, et la vitesse initiale du mobile est animée d'un mouvement de rotation sur elle-même. Le rayon vecteur qui joint l'observateur au mobile paraît tourner uniformément avec la vitesse angulaire  $\omega'$ . Quelle est à chaque instant la vitesse angulaire  $\omega$  de l'observateur et quelle sera la trajectoire apparente?

Si la force est proportionnelle à la  $n^{\text{ième}}$  puissance de la distance, que devra être l'exposant de cette puissance pour que les calculs puissent se ramener aux fonctions élémentaires? Examiner spécialement les cas  $n = 1$ ,  $n = -2$ .

*Épreuve pratique.* — Épure : intersection d'une sphère et d'un cône.

**Clermont.**

*Composition d'Analyse.* — Trouver les aires des boucles formées par les courbes dont les équations suivent :

$$1^{\circ} \quad x^{2n+1} + y^{2n+1} = a(xy)^n,$$

$$2^{\circ} \quad x^{2n} + y^{2n} = a(xy)^{n-1}.$$

Dans les deux cas,  $n$  désigne un nombre entier positif

*Composition de Mécanique.* — Mouvement d'un point pesant sur la courbe

$$ax + s - \frac{e^{ns} - 1}{n} = 0,$$

sachant qu'il y a une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, cette résistance étant exprimée par la formule  $R = nv^2$ .

*Épreuve pratique.* — On donne la déclinaison et l'ascension droite d'une étoile. On demande de calculer la longitude et la latitude.

### Lille.

*Composition d'Analyse.* — 1<sup>o</sup> Intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y - x)^2.$$

2<sup>o</sup> Des lignes asymptotiques sur une surface à courbures opposées. Équation différentielle de ces lignes. Détermination de leur plan osculateur. Leur courbure peut-elle s'obtenir par l'emploi du théorème de Meusnier, relatif à la courbure des sections obliques d'une surface?

*Composition de Mécanique.* — 1<sup>o</sup> Établir les trois équations, dites *équations d'Euler*, qui déterminent le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe sous l'action de forces données.

2<sup>o</sup> Un pendule composé est formé : 1<sup>o</sup> d'une tige OA pesante et homogène, de longueur connue  $2a$  et de masse  $m$ ; 2<sup>o</sup> d'un corps de forme quelconque, de masse  $\mu$ , dont le centre de gravité B peut être fixé en un point variable de la tige OA. On connaît le rayon  $k$  de gyration de ce corps par rapport à un axe mené par son

centre de gravité, parallèle à l'axe de suspension horizontal  $Oz$ .

Comment varie la durée des oscillations infiniment petites de ce pendule avec la position du point B sur la tige? (On ne déplace le corps B le long de la tige que par un mouvement de translation.)

*Épreuve pratique.* — La longitude de Moscou étant  $35^{\circ}17'30''$  et sa colatitute  $34^{\circ}14'47''$ , trouver l'azimut de Moscou sur l'horizon de Paris, azimut compté du Nord, et sa distance sphérique à Paris. On sait que la colatitute de Paris est  $41^{\circ}9'8''$ .

---

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1882.

---

### *Mathématiques spéciales.*

Par un point P pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en O, on mène à cette courbe trois normales qui la rencontrent aux points A, B, C. Les longueurs PA, PB, PC, PO étant représentées respectivement par  $a, b, c, l$ , on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont  $l^2 - a^2$ ,  $l^2 - b^2$ ,  $l^2 - c^2$ , et d'indiquer les signes des racines d'après la position du point P, dans les diverses régions du plan.

---

## NOTES DIVERSES;

PAR M. E. CATALAN.

---

*Méthode des isopérimètres.* — Dans l'avant-dernier numéro des *Nouvelles Annales* (juillet 1882), M. Rou-



ché s'énonce ainsi : « *Cela posé, considérons la suite de Schwab*

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, a_1, r_1, a_2, r_2.$$

Cette suite, ou plutôt celle-ci

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \dots,$$

ne doit-elle pas porter le nom de Descartes. En 1864, j'ai rappelé que la *Méthode des isopérimètres* est due au grand Philosophe. (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 546.)

*Un théorème de M. Lionnet.* — Probablement par suite de fautes typographiques, l'énoncé de ce théorème, tel que le donne M. Moret-Blanc (*Nouvelles Annales*, août 1882, p. 362), est presque inintelligible. Voici comment on peut le rectifier :

*Le produit de plusieurs nombres impairs consécutifs ne peut être une puissance exacte.* (Bien entendu, on fait abstraction de la puissance un) <sup>(1)</sup>.

Or, ce théorème, et d'autres du même genre, ont été démontrés par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1857, p. 278) <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Pour rectifier l'énoncé V, p. 362, il suffit de remplacer les virgules qui séparent les nombres 1, 3, 5, 7, 9, ... par des points qui en marquent la multiplication. Cette rectification est bien clairement indiquée par la démonstration du théorème relatif au produit 1.3.5.7.9... (2n-1)... (p. 362).

Quant à cette proposition générale, que *le produit de plusieurs nombres impairs consécutifs ne peut être une puissance exacte d'un degré supérieur à l'unité*, elle n'est démontrée qu'autant qu'il y ait, au moins, un nombre premier parmi les facteurs du produit.

(G.)

<sup>(2)</sup> Ceci n'est pas rigoureusement exact, car la démonstration de ce théorème a été abandonnée par M. Liouville à la sagacité du lecteur. C'est qu'en effet le théorème dont il s'agit, et plusieurs autres du même genre (voir *Nouvelles Annales*, 1<sup>re</sup> série, t. XVI, p. 394

Il y a plus; mon illustre Maître s'appuie, comme M. Moret-Blanc, sur le *postulatum* de M. Bertrand.

*Question proposée par M. Lionnet* (numéro d'août, p. 361). — Cette question, également résolue par M. Moret-Blanc, est un cas très particulier de celle-ci :

*Trouver plusieurs cubes entiers consécutifs, dont la somme soit un carré, dont la solution, publiée dans les Actes de l'Académie des Nuovi Lincei, a été reproduite dans les Nouvelles Annales (2<sup>e</sup> série, t. VI, p. 63 et 276.)*

*Théorème de M. Cambier* (voir *Nouvelles Annales*, août 1882, p. 383). — Dans *Mathesis*, M. Cambier en a donné la démonstration. On peut le généraliser ainsi :

*Soit ABCDE un pentagone inscrit, dans lequel les côtés AB, BC, DE sont égaux : 1<sup>o</sup> Si l'on mène une transversale XY, parallèle à AB, cette droite rencontre les diagonales AC, AD, BD et le côté AE, en quatre points F, G, H, K, tels que*

$$FK.GH = BH.DH.$$

*2<sup>o</sup> Si l'on prend sur le prolongement de KF, FI = HK, les points B, G, D, I appartiennent à une même circonférence.*

## PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES QUATERNIONS, par P.-G. Tait, professeur des Sciences physiques à l'Université

et t. XVII, p. 187 et 236), sont des corollaires bien simples de ce principe fondamental, établi par M. Tchebychef, que *entre un nombre  $a > 1$  et son double  $2a$ , il y a, au moins, un nombre premier.* (G.)

d'Édimbourg. Traduit sur la seconde édition anglaise, avec additions de l'auteur et notes du traducteur, par Gustave Plarr, docteur ès sciences mathématiques. Première Partie: *Théorie. Applications géométriques.* — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire (1882).

2. ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTION DE MACHINES, ou Introduction aux principes qui régissent les dispositions et les proportions des organes des machines. Contenant une collection de formules pour la construction des machines, par M. *W. Cawthorne Unwin*, professeur de Mécanique au Collège royal indien des ingénieurs civils. Traduit de l'anglais, sur la deuxième édition, avec l'approbation de l'auteur, par M. *J.-A. Bocquet*, ancien élève de l'École centrale, chef des travaux à l'École municipale d'apprentis de la Villette (Paris); et augmenté d'un *Appendice*, par M. *H. Léauté*, docteur ès sciences mathématiques, Répétiteur à l'École Polytechnique. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire (1882).

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1412

( voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 383 );

PAR UN ANONYME.

*Par le sommet B d'un triangle ABC, on mène une parallèle à la base, la médiane, la bissectrice et la hauteur; du milieu D de la base on abaisse sur la bissectrice une perpendiculaire DH, qui rencontre en E*

et F la hauteur et la parallèle à la base : il s'agit de démontrer que  $DA^2 = DH \times EF$ . (A. CAMBIER.)

Soient BG et BG' les bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle B <sup>(1)</sup>. Les quatre points A, C, G, G' étant conjugués harmoniques,  $DA^2 = DG \times DG'$ , ou, parce que  $DG' = BF$ , comme parallèles comprises entre parallèles,  $DA^2 = DG \times BF$ . Mais les triangles rectangles semblables EBF, DHG donnent

$$\frac{DG}{EF} = \frac{DH}{BF} \quad \text{ou} \quad DG \times BF = DH \times EF;$$

donc

$$DA^2 = DH \times EF.$$

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

### Question 1414

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 383)

PAR UN ANONYME.

*Soient, dans deux plans rectangulaires, deux circonférences ayant respectivement pour diamètres deux segments conjugués harmoniques de l'intersection de ces plans; si de deux points quelconques de l'une de ces circonférences on mène des droites à deux points quelconques de l'autre, on formera un quadrilatère, gauche (en général), dont deux côtés opposés ont le même produit que les deux autres côtés opposés.*

(H. SCHRÖTER.)

Soient

P, P' les deux plans rectangulaires des circonférences ayant respectivement pour diamètres des segments conjugués harmoniques MN, M'N' de l'intersection

<sup>(1)</sup> Le lecteur est prié de faire la figure.



de ces plans ; O, O' les milieux de ces segments, centres des circonférences ;

A, B deux points quelconques de la circonférence dont O est le centre et P le plan ;

A', B' deux points quelconques de l'autre circonférence.

Il s'agit de démontrer que, dans le quadrilatère ABA'B',  
 $AA' \times BB' = AB' \times BA'$  (1).

La démonstration que nous allons donner s'appuie sur les propositions suivantes, qui sont généralement connues :

1° Si MN, M'N' sont deux segments conjugués harmoniques d'une droite, et O, O' les milieux de ces segments, on a

$$\begin{aligned} ON^2 &= OM' \times ON', \\ O'M'^2 &= O'M \times O'N, \\ OO'^2 &= ON^2 + O'M'^2. \end{aligned}$$

2° Les points de la circonférence qui a pour diamètre l'un des deux segments, MN par exemple, sont à des distances des extrémités M', N' de l'autre segment dans le rapport invariable

$$\frac{NM'}{NN'} = \frac{MM'}{MN'}.$$

Et comme, en faisant tourner le plan de la circonférence autour de son diamètre MN, les distances d'un point de cette circonférence à M', N' restent constamment les mêmes, il en résulte que la sphère dont O est le centre et ON le rayon est le lieu géométrique des points de l'espace dont les distances à M' et N' sont dans le rapport  $\frac{NM'}{NN'}$ .

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

3° Si, MN et M'N' étant deux segments d'une même droite, dont les milieux sont O, O', on a

$$ON^2 = OM' \times ON' \quad \text{ou} \quad O'M'^2 = O'M \times O'N,$$

ces deux segments seront conjugués harmoniques (1°).

Cela admis, je mène dans le plan P, au point O', une perpendiculaire O'C à M'N', qui rencontre en C la droite AB prolongée, et du point C comme centre et avec CM' ou CN' pour rayon je décris une circonférence dans le plan P. Soient D et E les points d'intersection de cette circonférence et de la droite AB, les segments AB, DE seront conjugués harmoniques.

En effet, les triangles rectangles CO'M', CO'O donnent

$$CM'^2 = CO'^2 + O'M'^2, \quad CO^2 = CO'^2 + O'O^2,$$

d'où

$$CM'^2 = CO^2 + O'M'^2 - OO'^2 = CO^2 - ON^2,$$

puisque  $OO'^2 = ON^2 + O'M'^2$  (1°).

L'égalité  $CM'^2 = CO^2 - ON^2$  montre que la droite CM' est égale à la tangente menée du point C à la circonférence dont O est le centre et ON le rayon. Donc  $CM'^2$ , ou  $CD^2 = CB \times CA$ ; et par conséquent (3°) les deux segments AB, DE sont conjugués harmoniques. Il s'ensuit (2°) que la sphère dont C est le centre et CD le rayon est le lieu géométrique des points de l'espace dont les distances aux points A et B sont dans le rapport  $\frac{DA}{DB}$ .

Or il est facile de reconnaître que cette sphère coupe le plan P' suivant la circonférence qui a M'N' pour diamètre; car la droite CO', étant perpendiculaire au plan P', tous les points de cette circonférence sont à une distance de C égale au rayon CM' de la sphère.

---

(1) En supposant, toutefois, que les points M', N' soient situés d'un même côté du milieu O de MN.

On a donc

$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{DA}{DB} \quad \text{et} \quad \frac{B'A}{B'B} = \frac{DA}{DB},$$

d'où

$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{B'A}{B'B}, \quad AA' \times BB' = AB' \times BA'.$$

C. Q. F. D.

### Question 1415

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I, p. 383);

PAR M. H. B. D.,

Professeur de Mathématiques à Rome.

*Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}},$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes données. (S. REALIS.)

En posant

$$(1) \quad x^3 = (\alpha x + \beta)^2 (z^2 \pm 1)$$

et différentiant cette équation, on a

$$(2) \quad [3x^2 - 2\alpha(\alpha x + \beta)(z^2 \pm 1)] dx = 2(\alpha x + \beta)^2 z dz.$$

Éliminant  $(z^2 \pm 1)$  entre les équations (1) et (2) et réduisant, nous avons

$$x^2(\alpha x + 3\beta) dx = 2(\alpha x + \beta)^3 z dz$$

ou

$$\frac{\alpha x + 3\beta}{x} dx = \frac{2(\alpha x + \beta)^3 z}{x^3} dz,$$

ou bien, d'après l'équation (1),

$$(3) \quad \frac{\alpha x + 3\beta}{x} dx = \frac{2(\alpha x + \beta) z}{z^2 \pm 1} dz.$$

Mais de l'équation (1) on déduit

$$(4) \quad z(\alpha x + \beta) = \sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}.$$

Donc

$$\frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \pm (\alpha x + \beta)^2}} = \frac{2dz}{z^2 \pm 1}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - (\alpha x + \beta)^2}} = 2 \operatorname{arc tang} z + C$$

et

$$\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + (\alpha x + \beta)^2}} = \log \frac{z-1}{z+1} + C,$$

ou bien

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}} \\ = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \operatorname{arc tang} \left( \frac{z}{\sqrt{\pm 1}} \right) + C \end{aligned}$$

$z$  étant toujours égale à  $\frac{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}}{\alpha x + \beta}$ .

En général, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + (n+1)\beta}{x} \frac{(\alpha x + \beta)^{\frac{n}{2}-1} dx}{\sqrt{x^{n+1} \mp (\alpha x + \beta)^n}} \\ = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \operatorname{arc tang} \left( \frac{z}{\sqrt{\pm 1}} \right) + C, \end{aligned}$$

$z$  étant égale à  $\sqrt{\frac{x^{n+1} \mp (\alpha x + \beta)^n}{(\alpha x + \beta)^n}}$ .

*Note.* — La même question a été résolue par M. Charles Chabanel.

## QUESTIONS.

1427. Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(x-1)^m x^n dx}{\sqrt{P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + P_{n-2} x^{n-2} + \dots + P_2 x^2 + P_1 x + 1}},$$



où l'on a posé, pour abrégé,

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\dots(k+2m+1)}{1.2.3\dots(2m+1)} \quad (\text{S. REALIS.})$$

1428. Si l'on considère les solutions entières (non négatives) de chacune des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \dots$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de  $n + 2$  sur le nombre des diviseurs de  $n + 2$ .

*Exemple.* — Soit  $n = 10$ ; la première des équations admet 5 solutions; la seconde n'en admet qu'une seule; les équations suivantes sont impossibles; le nombre total des solutions est donc 6.

Or, 12 admet 6 diviseurs, et  $12 - 6 = 6$ .

(CATALAN.)

$$1429. \quad \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \right]^2 = 8 \frac{9}{8} \frac{24}{25} \frac{49}{48} \frac{80}{81} \frac{121}{120} \dots$$

(CATALAN.)

*Note.* — La question 1383 a été résolue par M. François Borletti, ingénieur à Milan; et les questions 1400, 1409 par M. Victor de Strékalof, à Saint-Petersbourg.

## RECTIFICATIONS.

(voir 3<sup>e</sup> série, t. I.)

Page 346, ligne 2, au lieu de  $\frac{1}{2}$ , lisez  $\frac{1}{3}$ .

Page 347, ligne 7, au lieu de  $\sqrt{x + 3x^5 +}$ , lisez  $\sqrt{x^4 + 3x^6 +}$ .

Page 349, ligne 2 en remontant, au lieu de  $\beta x^2$ , lisez  $\beta x^3$ .

Page 480, le théorème 1426 étant inexact, la question 1426 est retirée.

## SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. CH.<sup>s</sup> BIEHLER.

## I. Considérons deux équations

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

$$\varphi(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p = 0,$$

et supposons que  $m$  soit supérieur à  $p$ .

Soient de plus

$$f_\mu = A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \dots + A_\mu,$$

$$\varphi_\mu = B_0 x^\mu + B_1 x^{\mu-1} + \dots + B_\mu.$$

Formons le système des équations

$$f_0 \varphi(x) = 0,$$

$$f_1 \varphi(x) = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$f_{m-p-1} \varphi(x) = 0,$$

$$f_{m-p} \varphi(x) - \varphi_0 f(x) = 0,$$

$$f_{m-p+1} \varphi(x) - \varphi_1 f(x) = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$f_{m-1} \varphi(x) - \varphi_{p-1} f(x) = 0,$$

et désignons par  $\Delta$  le déterminant du système de ces équations, considérées comme linéaires et homogènes entre les quantités  $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x^1, x^0$ ; le déterminant  $\Delta$  sera symétrique par rapport à la diagonale principale. Désignons en outre par  $\Delta_1$  le déterminant du système des équations

$$\varphi(x) = 0,$$

$$x \varphi(x) = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$x^{m-p-1} \varphi(x) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} f_{m-p}\varphi(x) - \varphi_0 f(x) &= 0, \\ f_{m-p+1}\varphi(x) - \varphi_1 f(x) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{p-1} f(x) &= 0, \end{aligned}$$

considérées comme linéaires et homogènes en  $x^{m-1}$ ,  $x^{m-2}$ , ...,  $x$ ,  $x^0$ .

Il est aisé de voir que l'on a entre  $\Delta$  et  $\Delta_1$  la relation très simple

$$\Delta = \Delta_1 \times A_0^{m-p}.$$

Il nous sera avantageux, dans ce qui suit, de considérer le déterminant  $\Delta$  qui est symétrique, de préférence au déterminant  $\Delta_1$  qui ne jouit pas de la même propriété. Cette substitution de  $\Delta$  à  $\Delta_1$  ne présente aucun inconvénient si, comme nous le supposons,  $A_0$  est une quantité différente de zéro. Posons

$$\begin{aligned} f_0\varphi(x) &= G_{1,1}x^{m-1} + G_{1,2}x^{m-2} + \dots + G_{1,m}, \\ f_1\varphi(x) &= G_{2,1}x^{m-1} + G_{2,2}x^{m-2} + \dots + G_{2,m}, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{m-p-1}\varphi(x) &= G_{m-p,1}x^{m-1} + \dots + G_{m-p,m}, \\ f_{m-p}\varphi(x) - \varphi_0 f(x) &= G_{m-p+1,1}x^{m-1} + \dots + G_{m-p+1,m}, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{p-1} f(x) &= G_{m,1}x^{m-1} + \dots + G_{m,m}; \end{aligned}$$

on aura alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p,1} & \dots & \dots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & \dots & \dots & G_{m-p+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & \dots & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix},$$

et il est clair que  $\Delta = 0$  est une condition *nécessaire*

pour que les deux équations  $f(x) = 0$  et  $\varphi(x) = 0$  aient une racine commune. Je dis que cette condition  $\Delta = 0$  est aussi *dans tous les cas suffisante*.

# I.

2. Supposons en effet que  $\Delta = 0$  et que les déterminants d'ordre  $m - 1$ , mineurs de  $\Delta$ , ne soient pas tous nuls; nous allons démontrer que dans ce cas les équations proposées ont une seule racine commune.

On pourra en effet écrire l'identité

$$\Delta x^{m-\mu} = \begin{array}{ccccccc} \hline G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,\mu-1} f_0 \varphi(x) & G_{1,\mu+1} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,\mu-1} f_1 \varphi(x) & G_{2,\mu+1} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p,1} & \dots & \dots & G_{m-p,\mu-1} f_{m-p-1} \varphi(x) & G_{m-p,\mu+1} & \dots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & \dots & \dots & G_{m-p+1,\mu-1} f_{m-p} \varphi(x) - \varphi_0 f(x) & G_{m-p+1,\mu+1} & \dots & G_{m-p+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & \dots & \dots & G_{m,\mu-1} f_{m-1} \varphi(x) - \varphi x - 1 f(x) & G_{m,\mu+1} & \dots & G_{m,m} \\ \hline \end{array},$$

ou bien

$$(a) \quad \Delta x^{m-\mu} = U \varphi(x) - V f(x),$$



en posant

$$U = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,\mu-1} & f_0 & G_{1,\mu+1} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,\mu-1} & f_1 & G_{2,\mu+1} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p,1} & G_{m-p,2} & \dots & G_{m-p,\mu-1} & f_{m-p-1} & G_{m-p,\mu+1} & \dots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & G_{m-p+1,\mu-1} & f_{m-p} & G_{m-p+1,\mu+1} & \dots & G_{m-p+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,\mu-1} & f_{m-1} & G_{m,\mu+1} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix}$$

et

$$V = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,\mu-1} & 0 & G_{1,\mu+1} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,\mu-1} & 0 & G_{2,\mu+1} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p,1} & G_{m-p,2} & \dots & G_{m-p,\mu-1} & 0 & G_{m-p,\mu+1} & \dots & G_{m-p,m} \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & G_{m-p+1,\mu-1} & \varphi_0 & G_{m-p+1,\mu+1} & \dots & G_{m-p+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,\mu-1} & \varphi_{p-1} & G_{m,\mu+1} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Cette identité, dans l'hypothèse de  $\Delta = 0$ , devient

$$0 = U\varphi(x) - Vf(x);$$

elle montre donc que les deux équations  $f(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$  ont une racine commune, à moins que les deux fonctions  $U$  et  $V$  ne soient identiquement nulles quel que soit  $\mu$ , auquel cas on ne peut rien en conclure.

3. Nous allons montrer que, dans l'hypothèse faite, que les déterminants d'ordre  $m-1$ , mineurs de  $\Delta$ , ne sont pas tous nuls, les fonctions  $U$  et  $V$  ne peuvent pas être identiquement nulles, quel que soit  $\mu$ .

Désignons en effet par  $\Delta(\mu, \nu)$  le déterminant d'ordre  $m-1$  obtenu en supprimant dans la figuration de  $\Delta$  la colonne d'ordre  $\mu$  et la rangée d'ordre  $\nu$ .

Les fonctions U et V pourront s'écrire

$$\begin{aligned}\pm U &= f_{m-1} \times \Delta(\mu, m) \\ &\quad - f_{m-2} \times \Delta(\mu, m-1) + \dots \pm f_0 \times \Delta(\mu, 1), \\ \pm V &= \varphi_{p-1} \times \Delta(\mu, m) \\ &\quad - \varphi_{p-2} \times \Delta(\mu, m-1) + \dots \pm \varphi_0 \Delta(\mu, m-p+1)\end{aligned}$$

ou bien, en ordonnant ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes de  $x$ ,

$$\begin{aligned}U &= A_0 \Delta(\mu, m) x^{m-1} + A_1 \Delta(\mu, m) \\ &\quad - A_0 \Delta(\mu, m-1) \left| \begin{array}{l} x^{m-2} + A_2 \Delta(\mu, m) \\ - A_1 \Delta(\mu, m-1) \\ + A_0 \Delta(\mu, m-2) \end{array} \right| x^{m-3} + \dots \\ V &= B_0 \Delta(\mu, m) x^{p-1} + B_1 \Delta(\mu, m) \\ &\quad - B_0 \Delta(\mu, m-1) \left| \begin{array}{l} x^{p-2} + B_2 \Delta(\mu, m) \\ - B_1 \Delta(\mu, m-1) \\ + B_0 \Delta(\mu, m-2) \end{array} \right| x^{p-3} + \dots,\end{aligned}$$

Si donc U et V étaient identiquement nuls, on aurait

$$\Delta(\mu, m) = 0, \quad \Delta(\mu, m-1) = 0, \quad \dots, \quad \Delta(\mu, 1) = 0,$$

et par suite

$$\Delta(\mu, \nu) = 0,$$

pour toutes les valeurs de  $\mu$  et de  $\nu$ , depuis 1 jusqu'à  $m$ , ce qui est contraire à l'hypothèse; on peut donc conclure de ce qui précède :

*Si  $\Delta = 0$  et si les déterminants d'ordre  $m-1$ , mineurs de  $\Delta$ , ne sont pas tous nuls, les équations proposées admettent au moins une racine commune.*

4. Nous allons démontrer en outre que, si  $\Delta = 0$  et si les déterminants  $\Delta(\mu, \nu)$  ne sont pas tous nuls,  $\Delta(\mu, m)$  est nécessairement différent de zéro, quel que soit  $\mu$ , et par suite les fonctions U et V formées plus haut sont respectivement de degré  $m-1$  et  $p-1$ .

Considérons en effet le déterminant

$$\Delta(\mu_1, \nu_1) = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,\mu_1-1} & G_{1,\mu_1+1} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,\mu_1-1} & G_{2,\mu_1+1} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{\nu_1-1,1} & G_{\nu_1-1,2} & \dots & G_{\nu_1-1,\mu_1-1} & G_{\nu_1-1,\mu_1+1} & \dots & G_{\nu_1-1,m} \\ G_{\nu_1+1,1} & G_{\nu_1+1,2} & \dots & G_{\nu_1+1,\mu_1-1} & G_{\nu_1+1,\mu_1+1} & \dots & G_{\nu_1+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,\mu_1-1} & G_{m,\mu_1+1} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

On en tire l'identité

$$x^{m-\mu_2} \Delta(\mu_1, \nu_1)$$

$$= \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,\mu_1-1} & G_{1,\mu_1+1} & \dots & G_{1,\mu_2-1} & f_0 \varphi(x) \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,\mu_1-1} & G_{2,\mu_1+1} & \dots & G_{2,\mu_2-1} & f_1 \varphi(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{\nu_1-1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{\nu_1+1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,\mu_1-1} & G_{m,\mu_1+1} & \dots & G_{m,\mu_2-1} & f_{m-1} \varphi(x) - \varphi_{p-1} f(x) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -G_{1,\mu_1} x^{m-\mu_1} & G_{1,\mu_2+1} & \dots & G_{1,m} \\ -G_{2,\mu_1} x^{m-\mu_1} & G_{2,\mu_2+1} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{m,\mu_1} x^{m-\mu_1} & G_{m,\mu_2+1} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

que l'on peut écrire

$$(b) \quad x^{m-\mu_2} \Delta(\mu_1, \nu_1) \pm x^{m-\mu_1} \Delta(\mu_2, \nu_1) = U_1 \varphi(x) V_1 f(x);$$

les fonctions  $U_1$  et  $V_1$ , qui sont en général de degrés  $m-1$  et  $p-1$ , ne sont plus que de degrés  $m-2$  et  $p-2$  lorsque  $\nu_1 = m$ .

Si  $\Delta(\mu, m)$  était égal à zéro, pour une valeur particulière donnée à  $\mu$ , l'égalité précédente, pour  $\mu_1 = \mu$ ,  $\nu_1 = m$ , prendrait la forme

$$\pm x^{m-\mu} \Delta(\mu_2, m) = U_1 \varphi(x) - V_1 f(x),$$

et comme, d'après ce que nous avons démontré,  $f(x) = 0$  et  $\varphi(x) = 0$  ont au moins une racine commune, il s'ensuit que l'on a

$$\Delta(\mu_2, m) = 0,$$

quel que soit  $\mu_2$ ; par suite, si un seul des déterminants  $\Delta(\mu, m)$  était nul, tous les déterminants obtenus, en faisant varier  $\mu$  depuis 1 jusqu'à  $m$  dans  $\Delta(\mu, m)$ , seraient aussi nuls.

Mais, le déterminant  $\Delta$  étant symétrique, on a

$$\Delta(\mu, \nu) = \Delta(\nu, \mu);$$

par suite, l'identité (b), pour  $\mu_2 = m$ , se réduit à

$$\pm \Delta(\mu_1, \nu_1) = U_1 \varphi(x) - V_1 f(x),$$

et, comme les deux équations  $f(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$  admettent au moins une racine commune, on aurait

$$\Delta(\mu_1, \nu_1) = 0,$$

quels que soient  $\mu_1$  et  $\nu_1$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc :

*Si  $\Delta = 0$ , et si les déterminants  $\Delta(\mu, \nu)$  ne sont pas tous nuls, on a nécessairement  $\Delta(\mu, m) \geq 0$ , quel que soit  $\mu$ , et, par suite, les fonctions  $U$  et  $V$  sont respectivement de degrés  $m-1$  et  $p-1$ .*



5. Nous allons démontrer enfin que si  $\Delta = 0$ , et si les déterminants  $\Delta(\mu, \nu)$  ne sont pas tous nuls, les équations proposées n'admettent qu'une seule racine commune.

Faisons, en effet,  $\nu_1 = m$ ,  $\mu_1 = m$ ,  $\mu_2 = m - 1$  dans l'identité (b), il viendra

$$x \Delta(m, m) + \Delta(m - 1, m) = U_1 \varphi(x) - V_1 f(x).$$

Les quantités  $\Delta(m, m)$ ,  $\Delta(m - 1, m)$  sont, d'après ce que nous avons démontré, toutes les deux différentes de zéro; de plus, les fonctions  $U_1$  et  $V_1$ , qui sont dans ce cas de degré  $m - 2$  au plus, ne peuvent être identiquement nulles, puisque le premier membre ne l'est pas; par suite, si  $f(x) = 0$  et  $\varphi(x) = 0$  admettaient deux racines communes ou plus de deux, ces racines devraient satisfaire à l'équation du premier degré

$$x \Delta(m, m) + \Delta(m - 1, m) = 0,$$

et, par suite, cette équation devrait se réduire à une identité, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. Donc :

*Si  $\Delta = 0$  et si les déterminants  $\Delta(\mu, \nu)$  ne sont pas tous nuls, les équations proposées n'admettent qu'une seule racine commune, et cette racine est fournie par l'équation*

$$x \Delta(m, m) + \Delta(m - 1, m) = 0,$$

ou, comme il est facile de s'en assurer, par l'une des équations

$$x \Delta(\mu, m) + \Delta(\mu, m - 1) = 0,$$

obtenues en donnant à  $\mu$  les valeurs  $1, 2, \dots, m$ .

L'identité (b) donne aussi, pour  $\mu_2 = m$ ,  $\mu_1 = 1, 2, \dots, m - 1$ , une série d'expressions pour les puissances de la racine commune, depuis la puissance  $m - 1$ , jusqu'à la première puissance.

## II.

6. Supposons maintenant que  $\Delta = 0$ , que les déterminants  $\Delta(\mu, \nu)$  soient tous nuls, et que les déterminants d'ordre  $m - 2$ , mineurs de  $\Delta$ , ne soient pas tous nuls.

L'identité (b) se réduit à

$$0 = U_1 \varphi(x) - V_1 f(x).$$

Elle montre que les deux équations  $f(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$  ont au moins une racine commune, à moins que les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  ne soient identiquement nulles. Mais s'il en était ainsi, on aurait

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, m) &= 0, & \Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, m-1) &= 0, \\ \Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, 1) &= 0, \end{aligned}$$

et par suite

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

en désignant d'une manière générale par  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$  le déterminant d'ordre  $m - 2$ , mineur de  $\Delta$ , obtenu en supprimant dans la figuration de  $\Delta$  les colonnes d'ordre  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et les rangées d'ordre  $\nu_1$  et  $\nu_2$ .

Or nous avons supposé que les déterminants de la forme  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$  ne sont pas tous nuls; par suite, les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  ne sont pas identiquement nulles.

7. Nous allons démontrer, de plus, que les deux équations  $f(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$  ont, dans les hypothèses faites ci-dessus, au moins deux racines communes.

En effet, pour  $\nu_1 = m$ , les deux fonctions  $U_1$  et  $V_1$  de l'identité (b) s'abaissent respectivement aux degrés  $m - 2$  et  $p - 2$ ; par suite, si ces fonctions ne sont pas identiquement nulles pour  $\nu_1 = m$ , le théorème d'Euler nous montre que les équations  $f'(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$

admettent au moins deux racines communes. Il est aisé de démontrer que, dans ce cas,  $U_1$  et  $V_1$  ne sont pas identiquement nulles quels que soient les nombres  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ; il faudrait pour cela que l'on eût

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; m, \nu_2) = 0,$$

comme il est aisé de le voir en développant  $U_1$  et  $V_1$ .

Mais on peut établir, comme nous l'avons fait pour l'identité (b), une identité nouvelle, dans le premier membre de laquelle figurent trois déterminants d'ordre  $m - 2$ , mineurs de  $\Delta$ , savoir :

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} x^{m-\mu_3} \Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) \pm x^{m-\mu_2} \Delta(\mu_3, \mu_2; \nu_1, \nu_2) \\ \pm x^{m-\mu_1} \Delta(\mu_3, \mu_1; \nu_1, \nu_2) \\ = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x). \end{array} \right.$$

Si l'on fait dans cette identité  $\mu_3 = m$ , il viendra

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) \pm x^{m-\mu_2} \Delta(m, \mu_2; \nu_1, \nu_2) \\ \pm x^{m-\mu_1} \Delta(m, \mu_1; \nu_1, \nu_2) = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$

Si l'on avait

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; m, \nu_2) = 0,$$

on aurait aussi, à cause de la symétrie de  $\Delta$ ,

$$\Delta(m, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0, \quad \Delta(m, \mu_1; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

et par suite l'identité (c) prendrait la forme

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x),$$

et comme, d'après ce qui précède,  $f(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$  ont au moins une racine commune, on aurait

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  ne sont donc pas identiquement nulles, quand  $\nu_1 = m$  et quels que soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; par

suite, les équations proposées admettent au moins deux racines communes ; on a donc cette proposition :

*Si  $\Delta = 0$ , et si tous les mineurs  $\Delta(\mu, \nu)$  sont nuls, sans que les déterminants d'ordre  $m - 2$ , mineurs de  $\Delta$ , le soient tous, les deux équations proposées admettent au moins deux racines communes.*

8. Nous allons démontrer maintenant que, dans les hypothèses faites précédemment, les équations proposées n'admettent que deux racines communes.

Faisons en effet, dans l'identité (c),

$$\mu_3 = m, \quad \mu_2 = m - 1, \quad \mu_1 = m - 2,$$

on aura

$$\begin{aligned} \Delta(m - 2, m - 1; \nu_1, \nu_2) &\pm x \Delta(m, m - 1; \nu_1, \nu_2) \\ &\pm x^2 \Delta(m, m - 2; \nu_1, \nu_2) \\ &= U_2 \varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$

Si les deux équations  $f(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$  admettaient plus de deux racines communes, l'équation du second degré

$$\begin{aligned} \Delta(m - 2, m - 1; \nu_1, \nu_2) &\pm x \Delta(m, m - 1; \nu_1, \nu_2) \\ &\pm x^2 \Delta(m, m - 2; \nu_1, \nu_2) = 0 \end{aligned}$$

se réduirait à une identité ; par suite, on aurait

$$\begin{aligned} \Delta(m - 2, m - 1; \nu_1, \nu_2) &= 0, \\ \Delta(m, m - 1; \nu_1, \nu_2) &= 0, \\ \Delta(m, m - 2; \nu_1, \nu_2) &= 0. \end{aligned}$$

En faisant dans (c)

$$\mu_1 = m, \quad \mu_2 = m - 1,$$

cette identité devient

$$\begin{aligned} x^{m-\mu_3} \Delta(m, m - 1; \nu_1, \nu_2) &\pm x \Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) \\ &\pm \Delta(\mu_3, m - 1; \nu_1, \nu_2) = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$



et comme

$$\begin{aligned}\Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) &= 0, \\ \pm x \Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) \\ \pm \Delta(\mu_3, m-1; \nu_1, \nu_2) &= U_2 \varphi(x) - V_2 f(x).\end{aligned}$$

L'équation du premier degré

$$\pm x \Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) \pm \Delta(\mu_3, m-1; \nu_1, \nu_2) = 0$$

devant admettre au moins deux racines, on a

$$\begin{aligned}\Delta(\mu_3, m; \nu_1, \nu_2) &= 0, \\ \Delta(\mu_3, m-1; \nu_1, \nu_2) &= 0.\end{aligned}$$

Or nous avons vu que, dans ce cas, on a

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; on a donc cette nouvelle proposition :

*Si  $\Delta = 0$  et si tous les mineurs  $\Delta(\mu, \nu)$  sont nuls, sans que les mineurs du second ordre  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$  le soient tous, les équations proposées admettent deux racines communes et n'en admettent que deux.*

Les racines sont données par l'une des équations du second degré

$$\begin{aligned}\Delta(m-2, m-1; \nu_1, \nu_2) \pm x \Delta(m, m-1; \nu_1, \nu_2) \\ \pm x^2 \Delta(m, m-2; \nu_1, \nu_2) = 0.\end{aligned}$$

9. On peut faire voir de plus que, si  $\Delta = 0$  et si tous les mineurs  $\Delta(\mu, \nu)$  sont nuls, tous les mineurs  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$  sont aussi nuls, du moment que le mineur  $\Delta(m, m-1; m, m-1)$  est nul.

En effet, faisons, dans l'identité (c),

$$\mu_1 = m, \quad \mu_2 = m-1, \quad \nu_1 = m, \quad \nu_2 = m-1,$$

elle deviendra

$$x^{m-\mu_3} \Delta(m, m-1; m, m-1) \pm x \Delta(\mu_3, m-1; m, m-1) \\ \pm \Delta(\mu_3, m; m, m-1) = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x).$$

Dans l'hypothèse de

$$\Delta(m, m-1; m, m-1) = 0,$$

cette identité devient

$$\pm x \Delta(\mu_3, m-1; m, m-1) \pm \Delta(\mu_3, m; m, m-1) \\ = U_2 \varphi(x) - V_2 f(x).$$

Comme  $f(x) = 0$  et  $\varphi(x) = 0$  ont au moins deux racines communes, dans les hypothèses faites, on aura

$$\Delta(\mu_3, m-1; m, m-1) = 0, \quad \Delta(\mu_3, m; m, m-1) = 0.$$

Faisons maintenant, dans (c),  $\mu_1 = m, \mu_2 = m-1, \nu_1 = m$ , on en déduira

$$\Delta(\mu_3, m-1; m, \nu_2) = 0, \quad \Delta(\mu_3, m, \nu_2) = 0,$$

puis, pour  $\mu_3 = m, \nu_1 = m$ , on en tirera

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; m, \nu_2) = 0;$$

et enfin, en faisant, dans (c),  $\mu_3 = m$ , on en déduit

$$\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0,$$

ce qui montre que, dans le cas où

$$\Delta = 0, \quad \Delta(\mu, \nu) = 0, \quad \Delta(m, m-1; m, m-1) = 0,$$

tous les déterminants  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$  sont nuls.

Mais nous avons démontré que, si  $\Delta = 0, \Delta(m, m) = 0$ , on a  $\Delta(\mu, \nu) = 0$ ; par suite, si  $\Delta = 0, \Delta(m, m) = 0, \Delta(m, m-1; m, m-1) = 0$ , tous les déterminants  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)$  sont nuls.

10. En continuant de la même manière que précédemment, on démontrerait que, si  $\Delta = 0$ ,  $\Delta(\mu, \nu) = 0$ ,  $\Delta(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = 0$ , sans que les déterminants d'ordre  $m-3$ , mineurs de  $\Delta$ , soient tous nuls, les équations proposées admettent trois racines communes et n'en admettent pas plus de trois, et ainsi de suite.

On peut donc énoncer cette proposition générale :

*Si  $\Delta = 0$ , et si les déterminants d'ordre  $m-1$ ,  $m-2, \dots, m-p+1$ , mineurs de  $\Delta$ , sont tous nuls, sans que tous les déterminants d'ordre  $m-p$ , mineurs de  $\Delta$ , soient nuls, les équations proposées admettent  $p$  racines communes et n'en admettent pas plus de  $p$ .*

Ou bien encore,

*Si  $\Delta = 0$ , et si les déterminants d'ordre  $m-1$ ,  $m-2, \dots, m-p+1$ , mineurs de  $\Delta$ , obtenus respectivement en supprimant dans  $\Delta$  la dernière colonne et la dernière rangée, puis les deux dernières colonnes et les deux dernières rangées, etc., enfin les  $p-1$  dernières colonnes et les  $p-1$  dernières rangées sont nuls, et si le mineur d'ordre  $m-p$ , obtenu en supprimant dans  $\Delta$  les  $p$  dernières colonnes et les  $p$  dernières rangées, est différent de zéro, les équations proposées admettent  $p$  racines communes et n'en admettent pas davantage.*

## TRANSFORMATIONS PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES;

PAR M. LAGUERRE.

1. Une droite étant donnée, on peut supposer qu'elle soit décrite dans un certain sens par un point mobile; une telle droite, déterminée ainsi par sa position et le

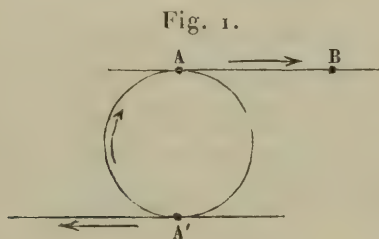
sens dans lequel elle est décrite, est désignée sous le nom de *semi-droite*; ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la droite (*fig. 1*).

Une même droite pouvant être décrite dans deux sens différents détermine deux *semi-droites* distinctes, que l'on appelle *semi-droites opposées*.

2. Un cercle étant donné, on peut supposer également qu'il soit décrit dans un certain sens par un point mobile; un tel cercle, déterminé ainsi par sa position et le sens dans lequel il est décrit, est désigné sous le nom de *cycle*; ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la circonférence du cycle.

Un même cercle pouvant être décrit dans deux sens différents détermine deux cycles distincts que l'on appelle *cycles opposés*.

3. En un point A d'un cycle, la tangente doit être



considérée, le long de l'élément infiniment petit commun au cycle, comme décrite dans le même sens que le cycle; la tangente au point A est donc une *semi-droite* bien déterminée.

De là résultent les conséquences suivantes :

1° On ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une *semi-droite* donnée.

Il est clair, en effet, qu'on peut mener au cercle déterminé par le cycle deux tangentes parallèles à la droite déterminée par la *semi-droite* donnée; mais, si l'on dé-



signe par A et par A' les points de contact de ces tangentes, on voit que les tangentes en ces points ont des directions opposées; une seule d'entre elles est donc parallèle à la semi-droite donnée.

2° *Deux cycles donnés ont deux tangentes communes et n'en ont que deux.*

Sur la *fig. 2*, on voit que les semi-droites AA' et BB' sont tangentes à la fois aux deux cycles K et K'. Les cercles déterminés par ces cycles ont quatre tangentes communes, dont deux sont précisément AA' et BB'; si l'on considère une quelconque des deux autres, par exemple CC', il est aisé de voir que, quel que soit le sens dans lequel on suppose décrite cette droite, elle ne peut toucher les deux cycles donnés, d'après la définition donnée du contact d'un cycle et d'une semi-droite.

*Deux cycles ont donc seulement deux tangentes communes*; leur point de rencontre P est le centre de similitude des deux cycles.

Ce centre de similitude est unique (1).

La distance AA', comprise sur l'une des tangentes communes entre les points de contact avec les cycles, est la *distance tangentielle des cycles*; elle n'est déterminée qu'en valeur absolue, mais non en signe.

4. Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si ce cycle est décrit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire.

Par suite, en désignant par T la distance tangentielle des deux cycles dont les centres sont O et O', la *fig. 2*

(1) Une proposition bien connue peut, par suite de cette définition, s'énoncer de la façon suivante :

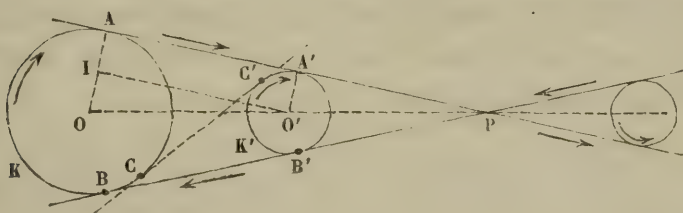
*Étant donnés trois cycles, les trois centres de similitude de ces cycles pris deux à deux sont en ligne droite.*

montre immédiatement que, en désignant par  $D$  la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2.$$

Cette formule détermine, dans tous les cas possibles, la distance tangentielle de deux cycles; en particulier, si

Fig. 2.



nous considérons deux cycles opposés, si le rayon d'un de ces cycles est  $R$ , l'autre est  $-R$ ; d'ailleurs, la distance de leurs centres est nulle; on a donc, dans ce cas,

$$T^2 = -4R^2.$$

5. Une semi-droite étant donnée, ainsi qu'un point  $P$ , le cycle qui a pour centre ce point et qui touche la semi-droite est bien déterminé; la distance du point  $P$  à la semi-droite est le rayon de ce cycle: elle est donc déterminée en grandeur et en ligne.

6. Un point doit être considéré comme un cycle d'un rayon infiniment petit; toutes les semi-droites passant par ce point doivent être considérées comme tangentes à ce cycle.

7. Étant données deux semi-droites quelconques, on peut construire une infinité de cycles qui leur soient tangents; les centres de ces cycles sont situés sur une même droite que l'on appellera la *bissectrice des semi-droites*.

Si, le point  $P$  d'intersection des semi-droites restant fixe, l'angle que font ces semi-droites diminue indéfiniment, en sorte qu'elles tendent toutes les deux à se confondre avec leur bissectrice, les rayons de tous les cycles inscrits diminuent indéfiniment et à la limite se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent deux semi-droites opposées.

On voit ainsi que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent.

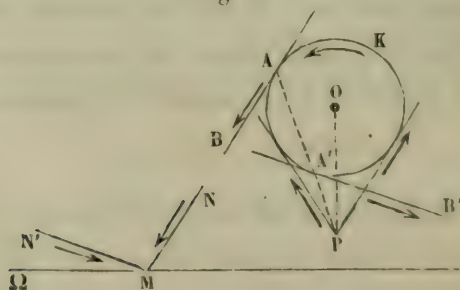
8. Il résulte aussi de ce qui précède qu'un cycle assujetti à toucher trois semi-droites données est entièrement déterminé. Son centre est le point de rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

#### MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES.

9. Considérons une droite fixe  $\Omega$ ; traçons dans le plan un cycle quelconque  $K$  ayant pour centre le point  $O$  et, sur la perpendiculaire abaissée du point  $O$  sur la droite  $\Omega$ , prenons un point arbitraire  $P$  (*fig. 3*).

Cela posé, à chaque semi-droite  $MN$  du plan on peut

Fig. 3.



faire correspondre une autre semi-droite de la façon suivante. Menons au cycle  $K$  la tangente  $AB$  parallèle à  $MN$ .

joignons le point de contact A au point P, et, au point A' où la droite ainsi obtenue rencontre le cycle, menons la tangente A'B'; menons enfin, par le point M où la semi-droite donnée coupe la droite fixe  $\Omega$ , une semi-droite MN' parallèle à A'B'.

MN' correspond ainsi à MN, et il est clair, en examinant les constructions effectuées, que MN correspond réciproquement à MN'; on dit que ces deux semi-droites sont réciproques.

Il résulte évidemment de ce qui précède que :

1° *Deux semi-droites réciproques se coupent sur la droite  $\Omega$  que l'on appelle l'axe de transformation;*

2° *Des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles.*

10. Si, du point P, on mène des tangentes au cycle K, on voit que les semi-droites parallèles à ces tangentes sont leurs réciproques à elles-mêmes. Il y a donc deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes; ces semi-droites font des angles égaux avec l'axe de transformation. Il est toutefois à remarquer que ces semi-droites ne sont réelles que si le point P est extérieur au cycle K.

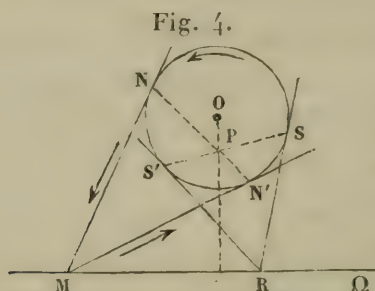
11. THÉORÈME. — *Deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.*

Soient, en effet,  $\Omega$  l'axe de transformation, MN et MN' deux semi-droites réciproques, SK une semi-droite quelconque du plan (*fig. 4*).

Construisons le cycle qui touche les semi-droites MN, MN' et SR; menons la droite NN' qui joint les points de contact de MN et de MN', et désignons par P le point où cette droite coupe la perpendiculaire abaissée du point O sur l'axe  $\Omega$ . Il est clair, d'après ce qui précède,



que la transformation qui a pour axe  $\Omega$  et dans laquelle  $MN$  correspond à  $MN'$  peut être définie au moyen du cycle  $K$  et du point  $P$ . Si maintenant on remarque que  $P$  est le pôle de la droite  $\Omega$  relativement au cycle  $K$ , on



voit que la tangente  $RS'$  est la réciproque de  $SR$ ; les deux couples de semi-droites réciproques  $MN$  et  $MN'$ ,  $RS$  et  $RS'$  sont deux tangentes au cycle  $K$ , ce qui démontre la proposition énoncée.

12. La transformation par semi-droites réciproques est aussi caractérisée par les deux propriétés suivantes :

*Deux semi-droites réciproques se coupent sur l'axe de transformation; deux couples de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle (1).*

Il est clair que la transformation est entièrement définie quand on se donne l'axe de transformation et deux semi-droites réciproques  $D$  et  $D'$ . Pour obtenir la réciproque d'une semi-droite quelconque  $\Delta$ , que l'on construise le cycle tangent à  $D$ ,  $D'$  et  $\Delta$ , et que, par le point  $M$  où  $\Delta$  coupe l'axe de transformation, on mène la

(1) La transformation par rayons vecteurs réciproques est également caractérisée par les deux propriétés suivantes :

*Deux points réciproques sont situés sur une droite passant par le pôle de transformation;*

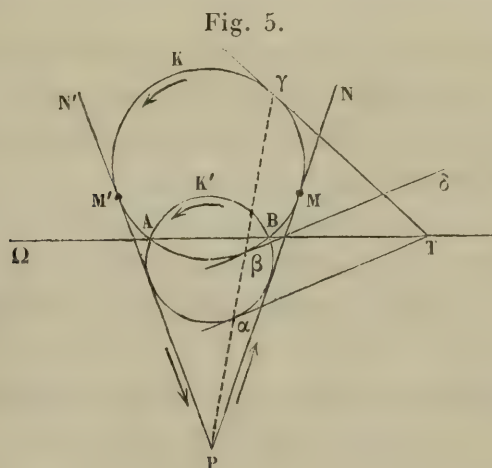
*Deux couples de points réciproques sont situés sur un même cercle.*

deuxième tangente au cycle, cette tangente sera la semi-droite cherchée.

13. Considérons une courbe  $K$  comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile  $\Delta$ , la réciproque  $\Delta'$  de  $\Delta$  enveloppera une courbe  $K'$  qu'on appelle la *transformée de la courbe  $K$* .

**THÉORÈME.** — *Quand on effectue une transformation par semi-droites réciproques, un cycle a pour transformé un autre cycle.*

Soit  $\Omega$  l'axe de transformation, et considérons un cycle



quelconque  $K$  coupant l'axe aux points  $A$  et  $B$ . Menons à ce cycle des tangentes  $MN$  et  $M'N'$  parallèles à la direction des semi-droites qui, dans la transformation, sont leurs réciproques à elles-mêmes, et désignons par  $P$  le point de rencontre de ces droites (*fig. 5*).

Cela posé, construisons le second cycle  $K'$  qui, passant par les points  $A$  et  $B$ , touche les semi-droites  $PM$  et  $PM'$ ; je dis que le cycle  $K'$  est le transformé de  $K$ .

On voit en effet que la transformation est définie par l'axe  $\Omega$ , le cycle  $K$  et le point  $P$  (9).

Par le point  $P$ , menons une sécante quelconque cou

pant le cycle  $K'$  au point  $\alpha$  et le cycle  $K$  aux points  $\beta$  et  $\gamma$ . On sait que les tangentes menées en  $\alpha$  et  $\gamma$  se coupent en un point  $T$  de l'axe radical  $\Omega$  des deux cycles; d'ailleurs,  $\beta\delta$  est parallèle à  $\alpha T$ : il résulte donc de la définition donnée plus haut (9) que  $\alpha T$  et  $\gamma T$  sont deux semi-droites réciproques. L'enveloppe des réciproques des semi-droites qui enveloppent  $K$  est donc le cycle  $K'$ : ce qu'il fallait démontrer.

14. On voit ainsi qu'un cycle  $K$  a pour réciproque un cycle  $K'$ . La relation qui existe entre deux cycles réciproques est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1° *Leur axe radical est l'axe de transformation;*

2° *Leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes, à savoir aux directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes.*

Désignons respectivement par  $R$  et  $R'$  les rayons des deux cycles (ces quantités étant données en grandeur et en signe) et par  $D$  et  $D'$  les distances de leurs centres à l'axe (<sup>1</sup>).

La première propriété donne la relation suivante :

$$D^2 - D'^2 = R^2 - R'^2,$$

et la deuxième, la relation

$$(1) \quad D - D' = \alpha(R - R'),$$

où  $\alpha$  désigne une constante caractérisant la transformation; d'où encore, en combinant ces deux relations,

$$(2) \quad D + D' = \frac{1}{\alpha}(R + R').$$

---

(<sup>1</sup>) On doit ici considérer l'axe de transformation comme une semi-droite, en lui donnant un sens arbitraire, de sorte que  $D$  et  $D'$  sont aussi déterminés en grandeur et en signe.

On en déduit

$$D' = \frac{D(\alpha^2 + 1) - 2\alpha R}{1 - \alpha^2}$$

et

$$R' = \frac{2\alpha D - R(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2}.$$

Le cycle  $K'$  est ainsi complètement déterminé, quand le cycle  $K$  est donné, puisque l'on connaît la distance de son centre à l'axe et son rayon.

*Remarques.* — Le cycle  $K'$  se réduit à un point, si  $R' = 0$ , ce qui exige que l'on ait

$$R\alpha^2 - 2\alpha D + R = 0,$$

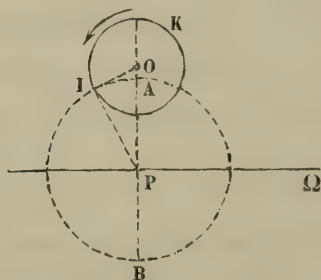
d'où

$$\alpha = D \pm \sqrt{D^2 - R^2}.$$

Il en résulte qu'un cycle étant donné, ainsi que l'axe de transformation, on peut toujours déterminer le module  $\alpha$  de la transformation, de façon que ce cycle ait pour transformé un point, dans le cas où ce cycle ne coupe pas l'axe. En désignant, en effet, par  $R$  son rayon et par  $D$  la distance de son centre à l'axe, on voit que,  $D^2 - R^2$  étant positif, l'équation précédente détermine pour le module  $\alpha$  deux valeurs réelles.

Soit  $K$  (*fig. 6*) le cycle donné; de son centre  $O$  abaissons

Fig. 6.



une perpendiculaire  $OP$  sur l'axe de transformation, et de son pied  $P$  comme centre décrivons le cercle qui coupe



orthogonalement le cycle donné. Ce cercle coupe la droite OP en deux points A et B; on prouvera aisément qu'il y existe une transformation telle que les tangentes au cycle K aient pour réciproques les semi-droites qui se croisent au point A. Il y existe également une autre transformation dans laquelle le point B est le réciproque du cycle K.

2° Une transformation étant définie par l'axe de transformation  $\Omega$  et par le module  $\alpha$ , il y existe une infinité de cycles qui ont pour transformés des points; ils sont définis par la relation

$$\frac{R}{D} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Leur propriété caractéristique est que *leur rayon varie proportionnellement à la distance de leur centre à l'axe*; elle présente une grande importance dans l'application de la transformation par semi-droites réciproques à la théorie des anticaustiques par réfraction.

15. THÉORÈME. — *La distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

Considérons, en effet, deux cycles; désignons respectivement par R et r leurs rayons, par D et d les distances de leur centre à l'axe de transformation, par p la projection sur cet axe de la droite qui joint leurs centres, et par T leur distance tangentielle; on aura évidemment

$$T^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2.$$

Soient de même R' et r' les rayons des cycles transformés, D' et d' les distances de leurs centres à l'axe, et T' leur distance tangentielle. Si l'on remarque que deux cycles réciproques ont leurs centres sur une même per-

pendiculaire à l'axe, il est clair que l'on a

$$T'^2 = p^2 + (D' - d')^2 - (R' - r')^2.$$

Or les formules données plus haut donnent aisément

$$D' - d' = \frac{(D - d)(\alpha^2 + 1) - 2\alpha(R - r)}{1 - \alpha^2},$$

$$R' - r' = \frac{2\alpha(D - d) - (\alpha^2 + 1)(R - r)}{1 - \alpha^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$T'^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2 = T^2;$$

ce qui démontre la proposition énoncée (1).

#### APPLICATIONS DE LA MÉTHODE.

16. Soient trois cycles K, K' et K'' ayant respectivement pour centre les points O, O' et O''. Soient P' le centre de similitude des cycles O et O', P'' le centre de similitude des cycles O et O''. Supposons que la droite P'P'' ne coupe pas le centre O; en prenant cette droite pour axe de transformation, nous pourrions toujours, en choisissant convenablement le module de la transformation, transformer le cycle O en un point  $\omega$ . Les deux tangentes P''A et P''B auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points P'' et  $\omega$ ; le cycle K', étant tangent à P''A et P''B, aura pour trans-

---

(1) Relativement à la transformation par rayons vecteurs réciproques, le théorème analogue est le suivant : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles correspondants.*

Ce théorème s'étend à deux courbes quelconques, et de même dans la transformation par semi-droites réciproques :

*Si une semi-droite  $\Delta$  touche deux courbes aux deux points a et b, et si la semi-droite réciproque  $\Delta'$  touche les courbes transformées aux points a' et b', les deux longueurs ab et a'b' sont égales.*





17. La transformation par semi-droites réciproques peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser diverses propriétés des figures.

18. Pour en donner un exemple simple, considérons le problème suivant : *Construire un cycle touchant trois cycles donnés.*

Supposons que les cycles donnés  $K$ ,  $K'$  et  $K''$  soient tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les coupe pas, nous pouvons, d'après ce qui précède, en prenant cette droite pour axe de transformation, transformer les cycles donnés en trois points  $\omega$ ,  $\omega'$  et  $\omega''$ . Le cercle passant par ces points détermine deux cycles opposés  $H$  et  $H'$  dont les réciproques seront les solutions du problème. Deux cycles opposés rencontrant l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques; d'où il suit que le problème proposé a deux solutions, et que l'axe radical des deux cycles qui satisfont à la question est l'axe de similitude des cycles donnés.

Le problème de *mener un cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent. On peut, en effet, donner à un des cercles un sens arbitraire, de façon à le transformer en un cycle; on transformera également les deux autres cercles en cycles en fixant leur direction, ce qui pourra se faire de quatre façons différentes. A chaque groupe de cycles correspondent deux solutions; le problème proposé aura donc en tout huit solutions.

---

par rayons vecteurs réciproques est la suivante : *Lorsque deux cercles se coupent, on peut toujours les transformer en deux droites.*



19. Un point décrivant dans un sens déterminé une semi-droite ou un cycle, si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, on voit que le point transformé décrit une autre semi-droite ou un autre cycle (lequel peut se réduire à une semi-droite quand le pôle de transformation est sur le cycle considéré).

On peut souvent, avec avantage, employer simultanément la transformation par rayons vecteurs réciproques et la transformation par semi-droites réciproques. Ainsi, en général, *étant donnés cinq cycles, on peut, par deux transformations successives, les transformer en deux semi-droites et en trois points*. En effet, si deux des cycles se coupent, par une première transformation par rayons vecteurs réciproques, on pourra les transformer en deux semi-droites. Les trois autres cycles ayant pour transformées  $K$ ,  $K'$  et  $K''$ , si l'axe de similitude de ces cycles ne les rencontre pas, on pourra, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points, tandis que les semi-droites se transformeront en semi-droites.

## ÉQUATION EN $S$ DE DEGRÉ $m$ ET DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE EN CARRÉS

[ FIN (1) ];

PAR M. WALECKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

1. Soit  $f(x, y, \dots, z)$  une fonction homogène, réelle, du second degré, des  $m$  variables  $x, y, \dots, z$ .

(1) Même Tome, p. 501.

Par la substitution

[illegible]

il vient identiquement

$$(2) \quad f(x, y, \dots, z) = Ax'^2 + 2Lx'y' + By'^2 + \dots + Cz'^2.$$

Je dis que l'on a

$$(3) \quad A = \alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_1 f'_{\gamma_1},$$

$$(4) \quad L = \alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_2 f'_{\gamma_1},$$

où les  $f'$  désignent les demi-dérivées de  $f$ .

En effet, pour isoler A dans le second membre de (2), il suffit de prendre la demi-dérivée du second membre par rapport à  $x'$ , puis d'y faire  $x'$  égal à l'unité, les autres variables  $\gamma', \dots, z'$  nulles.

J'effectue les mêmes opérations sur le premier membre, regardé comme fonction composée, et j'obtiens l'égalité (3).

De même j'aurai (4) en égalant les demi-dérivées des deux membres de (2), prises par rapport à  $y'$ , et où je fais ensuite  $x'$  égal à l'unité, les autres variables nulles.

On peut remarquer que le second membre de (4) ne change pas par l'échange des indices 1 et 2.

2. Je suppose maintenant que la substitution (1) réduise  $f(x, y, \dots, z)$  à la forme canonique

$$Ax'^2 + By'^2 + \dots + Cz'^2,$$

et que cette substitution soit orthogonale, c'est-à-dire réduise  $x^2 + y^2 + \dots + z^2$  à  $x'^2 + y'^2 + \dots + z'^2$ .

Par cette substitution, on aura, quel que soit S,



définis déterminent effectivement une substitution orthogonale et réduisent la fonction.

Je suppose d'abord que toutes les racines de l'équation en  $S$  soient distinctes; à l'une  $S_1$  correspond un système de solutions en  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$  que je détermine par la condition

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \gamma_1^2 = 1;$$

à une autre  $S_2$  correspondra un second système  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2$ . Je dis que l'on a

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

En effet, si j'ajoute membre à membre les équations (6) après multiplication par  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2$ , et en y mettant  $S_1$  à la place de  $A$  il reste

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_2 f'_{\gamma_1} = S_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2);$$

on aurait de même l'égalité qui s'en déduit par l'échange des indices 1 et 2.

Comme l'échange des indices ne change pas le premier membre et que  $S_1$  est différent de  $S_2$ , il faut que l'on ait

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_2 f'_{\gamma_1} = 0.$$

La première et les analogues montrent que la substitution est orthogonale.

La seconde et les analogues montrent que cette substitution annule les coefficients des rectangles et donne à la fonction la forme canonique.

Enfin, on vérifie, en ajoutant membre à membre les égalités (6) après multiplication par  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$  et en y remplaçant  $A$  par la racine  $S_1$  de l'équation en  $S$ ,

$$\alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \dots + \gamma_1 f'_{\gamma_1} = S_1,$$

qui exprime que le coefficient du carré  $x'^2$  est bien la racine  $S_1$  qui a donné les coefficients  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$ .



4. Je suppose enfin que l'équation en  $S$  ait des racines multiples. Au lieu que la substitution orthogonale, propre à la réduction, soit déterminée d'une façon unique, elle pourra être choisie de plusieurs manières.

A chaque racine simple correspond une colonne de coefficients de la substitution (1), comme dans le cas précédent.

A une racine multiple en correspondront plusieurs : pour  $S$  racine multiple d'ordre  $p$  de l'équation en  $S$ , les équations (6), où l'on remplace  $A$  par  $S$ , se réduisent à  $m - p$  distinctes. Je choisis arbitrairement un premier système de solutions vérifiant  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \gamma_1^2 = 1$ .

Puis, j'en choisis un second en associant aux mêmes équations la condition

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

et ainsi de suite, de façon à obtenir des colonnes de coefficients, qui, par l'adjonction de ces conditions, satisfont entre elles et avec les autres à la condition d'orthogonalité.

Parmi les coefficients qui répondent à cette racine multiple d'ordre  $p$ , on en peut choisir arbitrairement un nombre donné par

$$(p - 1) + (p - 2) + \dots + 1 = \frac{p(p - 1)}{2}.$$

Quel que soit le choix fait, moyennant ces conditions, la forme réduite sera

$$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + \dots + S_m z'^2,$$

$S_1, S_2, \dots, S_m$  étant les racines de l'équation en  $S$ , et chacune d'elles étant répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité.

---

## CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA TANGENTE ET DU RAYON DE COURBURE DES SECTIONS PLANES DU TORE ;

PAR M. LAQUIÈRE.

Considérons le tore comme l'enveloppe d'une sphère de rayon constant  $r$ , dont le centre décrit un cercle de rayon  $a$ . Un plan quelconque sera défini par l'angle  $\varphi$  qu'il fait avec l'axe du tore, ou axe du cercle lieu des centres, et la distance  $p$  du point  $\Omega$ , où il coupe l'axe, au centre de la surface.

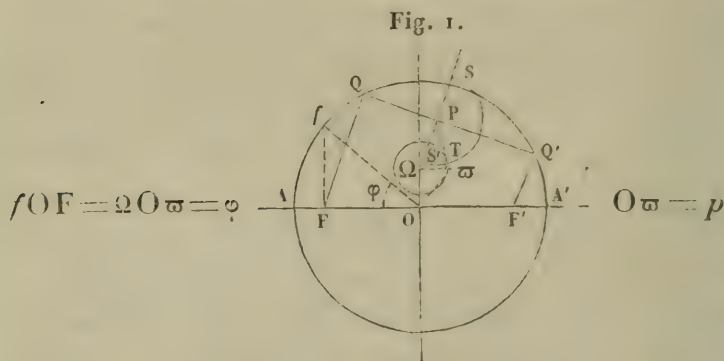
Cela posé, les centres des sphères enveloppées par le tore auront pour projection une ellipse de rayons principaux  $a$  et  $a \sin \varphi$ , ce dernier dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan sécant, en supposant l'axe du tore vertical. Ces projections seront les centres des cercles d'intersection du plan sécant avec les sphères enveloppées, cercles dont l'enveloppe sera elle-même la courbe d'intersection du tore et du plan considéré.

Les lignes de contact des sphères avec le tore étant des méridiens de la surface sont contenues dans des plans passant par l'axe, et par suite les cordes de contact des cercles enveloppés par la courbe d'intersection du plan et de la surface passent toutes par le point  $\Omega$ , où le plan est percé par l'axe. De plus, comme cordes d'intersection de deux cercles infiniment voisins, elles sont perpendiculaires à la ligne des centres, c'est-à-dire à la tangente à l'ellipse lieu des centres. Ainsi :

Le diamètre polaire de la section plane du tore est la podaire, par rapport au point  $\Omega$ , de l'ellipse projection du cercle directeur de la surface canal. Mais, d'autre part, le

produit des distances du pôle  $\Omega$  aux deux points de la courbe situés sur le même rayon, et ayant pour milieu un point de la podaire à l'ellipse, est constant et égal à la puissance  $(a^2 + p^2 - r^2)$  du point  $\Omega$  par rapport aux sphères enveloppées. Les points de la courbe d'intersection se déterminent donc avec la plus grande facilité par la construction suivante :

Sur un diamètre  $AA'$  du cercle  $O$  de rayon  $a$  (*fig. 1*), prenons  $OF = OF' = a \cos \varphi$ . L'ellipse auxiliaire aura



$AA'$  pour grand axe et  $F, F'$  pour foyers. Sur le rayon perpendiculaire à  $AA'$ , prenons  $O\Omega = p \cos \varphi$ ; le point  $\Omega$  sera la trace de l'axe du tore sur le plan sécant; enfin, autour du point  $\Omega$ , traçons un cercle de rayon

$$f = \sqrt{a^2 + p^2 - r^2}.$$

Menons les parallèles  $FQ, F'Q'$  au rayon vecteur  $\Omega P$ , sur lequel nous voulons déterminer les points de la courbe d'intersection. La corde  $QQ'$  du cercle  $O$  de rayon  $a$  sera tangente à l'ellipse des centres au centre du cercle sur lequel se trouvent les points  $S$  et  $S'$  cherchés. Menons la parallèle  $\Omega P$  à ces droites. Son pied  $P$  sur  $QQ'$  sera le point de la podaire, milieu des points cherchés, et si, sur cette droite, de part et d'autre du point  $P$ , on rabat la tangente  $PT$  menée de ce point au cercle  $\Omega$ ,



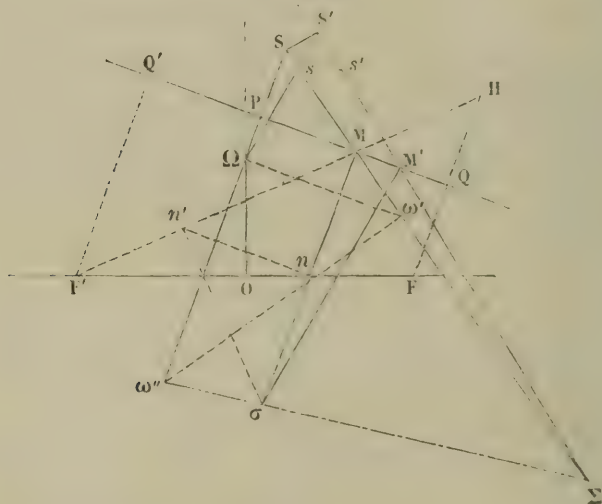


*Rayon de courbure.* — On sait que, pour obtenir le centre de courbure  $\sigma$  de l'ellipse au point M, il suffit de :

1° Élever  $nn'$  perpendiculaire à la normale par le pied  $n$  de celle-ci sur l'axe transverse (fig. 3);

2° Mener par le point  $n'$  où cette perpendiculaire

Fig. 3.



coupe le rayon vecteur  $F'M$  une perpendiculaire  $n'\sigma$  à ce rayon vecteur;

3° L'intersection de cette dernière avec la normale est le centre  $\sigma$  de courbure.

Ce point déterminé, par la trace  $\Omega$  de l'axe du tore sur le plan sécant élevons  $\Omega\omega'$  perpendiculaire au rayon polaire  $\Omega S$  de la courbe d'intersection (parallèle à la normale  $Mn$  au point correspondant de l'ellipse qui définit la normale  $SM$ ). Du point  $\omega'$ , où cette perpendiculaire rencontre la normale  $SM\omega'$  à la courbe d'intersection, élevons à cette normale une perpendiculaire  $\omega'\omega''$  qui vient couper en  $\omega''$  le rayon polaire.

La droite  $\omega''\sigma$  qui joint le point  $\omega''$  au centre de courbure de l'ellipse déterminera le centre de courbure  $\Sigma$  de la courbe d'intersection par sa rencontre avec la normale  $SM$ .

En effet, soient  $S'$  et  $M'$  les points correspondants de la courbe et de l'ellipse infiniment voisins de  $S$  et  $M$ . Le centre de courbure cherché  $\Sigma$  sera l'intersection des deux normales  $SM$  et  $S'M'$  infiniment voisines. Or les droites  $\Omega S'$  et  $\sigma M'$  étant parallèles, comme toutes les deux perpendiculaires à la tangente à l'ellipse au point  $M'$ , les angles infiniment petits  $S\Omega S'$  et  $M\sigma M'$  sont égaux. Donc,  $s$  étant l'intersection de  $\Omega S'$  avec la perpendiculaire  $Sss'$  à  $\Omega S$ , c'est-à-dire la parallèle à  $MM'$ , on a l'égalité

$$\frac{Ss}{MM'} = \frac{\Omega S}{\sigma M}.$$

De plus, si nous désignons par  $s'$  l'intersection de cette même parallèle avec la normale voisine qui est perpendiculaire à  $SS'$ , dans le triangle infinitésimal  $Ss'S'$  dont tous les angles sont finis, la longueur  $Ss$  est la projection de  $SS'$  qui est elle-même la projection de  $Ss'$ . La figure formée par les quatre points  $S, s, S', s'$  est donc semblable à celle que nous avons construite avec les points  $S, \Omega, \omega', \omega''$  qui leur correspondent, puisque l'angle  $\Omega S \omega'$  est égal à  $s S s'$ . En conséquence,

$$\frac{Ss'}{Ss} = \frac{S\omega''}{S\Omega},$$

d'où

$$\frac{Ss'}{MM'} = \frac{S\omega''}{M\sigma}.$$

Or on a

$$\frac{S\Sigma}{M\Sigma} = \frac{Ss'}{MM'}.$$

Donc

$$\frac{S\Sigma}{M\Sigma} = \frac{S\omega''}{M\sigma}.$$

Ce qui, en vertu du parallélisme des droites  $S\omega''$  et  $M\sigma$ , justifie la construction indiquée ci-dessus du centre de courbure  $\Sigma$ .

---

## TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME I, 3<sup>e</sup> SÉRIE.)

## Théorie des nombres.

	Pages.
Démonstration des propositions de M. Lionnet; par M. Moret-Blanc.....	357

## Algèbre.

Sommation d'une série remarquable; par M. Maurice d'Ocagne...	171
Sur les équations algébriques de la forme $(x^p - a^p)\psi(x) = 0$ ; par le P. Berloty.....	173
Sur le développement des logarithmes et des exponentielles; par M. Maurice d'Ocagne.....	241
Solution de la question de Mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1880; par M. Moret-Blanc.....	266
Équation en S de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés; par M. Walecki.....	401 et 556
Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1881; par M. Lez.....	410
Sur l'élimination; par M. Ch. Biehler.....	529

## Géométrie élémentaire.

Solution de la question proposée au concours général de 1879, pour la classe de Philosophie; par M. A. Leinekugel.....	184
Solution des questions proposées au concours général de 1879, pour la classe de troisième; par M. H. Lez.....	185
Solution de la question de Mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1880; par M. Moret-Blanc.....	267
Sur la méthode des isopérimètres; par M. Eugène Rouché.....	325
Premiers éléments de la Géométrie descriptive; par M. A. Mannheim.....	385 et 433

## Cinématique.

Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes; par M. H. Resal.....	7
Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique; par M. Maurice d'Ocagne.....	40
Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe; par M. V. Liguine.....	153

	PAGES.
Sur la théorie du déplacement; par M. <i>Halphen</i> .....	296
Sur quelques propriétés géométriques du mouvement d'un point; par M. <i>V. Liguine</i> ...	300
Théorème de Cinématique; par M. <i>E. Habich</i> .....	458

### Géométrie supérieure.

Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique; par M. <i>H. Dufau</i> .....	99
Solution de la question de Géométrie descriptive proposée au concours d'agrégation de l'enseignement spécial en 1880; par M. <i>Ernest Lebon</i> .....	269
Théorème relatif à certain réseau de quatre sections coniques; par M. <i>Fritz Hofmann</i> .....	321
Composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1882 (solution géométrique); par un ancien élève de <i>Mathématiques spéciales</i> .....	351

### Géométrie à deux dimensions.

Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques; par M. <i>Halphen</i> .....	5
Note sur les coordonnées bipolaires; par M. <i>P. Barbarin</i> .....	15
De l'involution de plusieurs points sur une conique; par M. <i>Weill</i> .....	62
Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques; par M. <i>X. Automari</i> .....	102
Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1881; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	114
Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1880; par M. <i>H. Cartier</i> .....	118
Concours d'admission à l'École Centrale en 1880 (première session); solution par M. <i>H. Lez</i> ....	122
Concours d'admission à l'École Centrale (deuxième session, 1879); solution par M. <i>J. Auzelle</i> .....	176
Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au concours général de 1880; par M. <i>E. Dorlet</i> .....	256
Concours d'admission à l'École Centrale (première session, 1881); solution par M. <i>L. Kien</i> .....	278
Solution des questions proposées au concours pour les bourses de licence (Marseille, 1881); par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	283
Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal; par M. <i>E. Brassinne</i> .....	318
Transformation par semi-droites réciproques; par M. <i>Laguerre</i> .....	542
Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore; par M. <i>Laquière</i> .....	561



## Géométrie à trois dimensions.

	Pages.
Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde; par un Abonné. ....	29
Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite; par M. E. Rouché.....	97
Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1881; par M. J.-B. Pomey... ..	111
Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1880; par M. J. Boudènes.....	180
Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en S; par M. Ch. Brisse.....	193
Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre en coordonnées obliques; par M. Ch. Brisse.....	207
Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second degré; par M. J. Caron.....	217
Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution de second ordre; par M. Ernest Lebon.....	219
Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1879; par M. Gambey.....	245
Relation entre les distances mutuelles : 1 <sup>o</sup> de quatre points situés sur un même cercle; 2 <sup>o</sup> de cinq points situés sur une même sphère; par M. X. Antomari.....	462

## Mécanique.

Remarques sur le pendule; par M. Maurice d'Ocagne.....	32
Sur un théorème de Pappus; par M. Laquière.....	110
Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance; par M. A. Legoux.....	145
Solution de la question de Mécanique élémentaire proposée au concours d'agrégation de 1879; par M. Gambey.....	254
Solution de la question de Mécanique proposée pour l'obtention du brevet de Cluny en 1880; par M. C. Roubaudi.....	274
Sur la courbe synchrone de la cycloïde; par M. H. Resal.....	289
Sur les équations de l'équilibre astatique; par M. A. de Saint-Germain.....	306
Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier; par M. E. Brassinne.....	320
Développements sur la question relative à l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule; par M. H. Resal.....	337

	Pages
Sur les propriétés mécaniques de la lemniscate; par M. <i>H. Resal</i> .....	481
Solution d'une question de Mécanique proposée au concours d'agrégation de 1879; par M. <i>Gambey</i> .....	508

### Cosmographie.

Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de cer- tains problèmes de Cosmographie; par M. <i>Ed. Collignon</i> .....	490
--	-----

### Calcul différentiel et intégral.

Solution d'un problème de Géométrie; par M. <i>A. Picart</i> .....	33
Note sur les propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde; par M. <i>A. Picart</i> .....	49
Note sur les paraboloides du second ordre osculateurs aux surfa- ces; par M. <i>A. Picart</i> .....	163
Solution d'une question d'Analyse proposée au concours d'agré- gation de 1880; par M. <i>E. Henry</i> .....	220
Solution des questions de licence proposées au concours d'agré- gation de 1880; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	230
Sur une intégrale double; par M. <i>Gérassime Orlow</i> .....	311
Sur quelques intégrales indéfinies; par M. <i>S. Réalis</i> .....	343
Note sur un développement d'une fonction en série; par M. <i>J.</i> <i>Marchand</i> .....	450

### Mélanges.

Correspondance.....	46, 330, 415, 472 et 515
Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1881).....	79
Questions proposées pour l'admission à l'École Polytechnique danoise.....	85
Compositions données aux examens de licence dans les différentes Facultés de France, en 1880.....	87, 133, 465 et 516
Publications récentes.....	90, 288 et 521
Bibliographie.....	95, 144 et 332
École Navale (concours de 1881).....	126
École Forestière (concours de 1881).....	128
École Polytechnique (concours de 1881).....	129
Concours d'admission à l'École Centrale en 1881.....	130 et 365
Avis aux candidats à l'École Polytechnique.....	143
Errata.....	144, 288 et 432
Concours général de 1881.....	189
Concours d'agrégation de l'enseignement secondaire spécial en 1880.....	236
Errata des Tables de logarithmes de Schrön.....	240
École spéciale militaire (concours de 1882).....	413

	Pages.
Publications étrangères.....	415
Concours général de 1882.....	519
Notes diverses par M. <i>E. Catalan</i> .....	519
Rectifications.....	528

### Questions proposées.

Questions 1382 à 1383.....	48
Questions 1384 à 1395.....	140
Questions 1396 à 1399.....	192
Questions 1400 à 1403.....	239
Questions 1404 à 1410.....	335
Questions 1411 à 1417.....	382
Questions 1418 à 1422.....	431
Questions 1423 à 1426.....	479
Questions 1427 à 1429.....	527

### Questions résolues.

Question 1322; par M. <i>H.-J. Krantz</i> .....	419
Question 1337; par M. <i>Fauquembergue</i> .....	473
Question 1367; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	368
Question 1368; par M. <i>Ferdinando Pisani</i> .....	371
Question 1369; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	422
Question 1370; par M. <i>Goffart</i> .....	424
Question 1375; par M. <i>Choudadov</i> .....	374
Question 1377; par M. <i>François Borletti</i> .....	376
Question 1378; par M. <i>S. Réalis</i> .....	426
Question 1379; par M. <i>François Borletti</i> .....	377
Question 1380; par M. <i>A. Leblond</i> .....	379
Question 1381; par M. <i>Henri Cartier</i> .....	426
Question 1383; par M. <i>Lez</i> .....	428
Question 1386; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	380
Question 1397; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	382
Question 1400; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	430
Question 1401; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	475
Question 1408; par M. <i>Lionnet</i> .....	476
Question 1409; par M. <i>E. Bénézech</i> .....	478
Question 1412; par un <i>Anonyme</i> .....	522
Question 1414; par un <i>Anonyme</i> .....	523
Question 1415; par M. <i>H. B. D.</i> .....	526
Question 1426.....	528



## TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME I, 3<sup>e</sup> SÉRIE.)

MM.	Pages.
ABONNÉ.....	29
AHETROE, au Lycée de Nancy.....	431
ALEMBERT (D').....	471
ALLÉGRET, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont....	332
AMPÈRE.....	171
ANDRÉ (C.), directeur de l'Observatoire de Lyon.....	92
ANDRÉ (DÉSIRÉ), professeur à Sainte-Barbe.....	325
ANGOT (A.), professeur au Collège Chaptal.....	92
ANONYME.....	522 et 523
ANTOMARI (X.), professeur au Lycée de Carcassonne....	102 et 462
ARCHIMÈDE.....	93 et 320
AUBEL (EDMOND VAN).....	380
AUZELLE (J.), élève du Lycée de Moulins.....	176
BARBARIN (P.), professeur au Lycée de Toulon. 15, 240, 383 et	480
BARDELLI (G.), à Milan.....	419
BARRAN (G.), étudiant à la Faculté des Sciences de Bordeaux...	330
BELLAVITIS (G.).....	333
BÉNÉZECH (E.), élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	478
BERLOTY (L'ABBÉ).....	173
BERNOULLI.....	289 et 481
BERTRAND (J.), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.	362 et 521
BESANT (W.-H.), professeur au Collège Saint-Jean, à Cambridge.	288
BIEHLER (Ch.), directeur des études au Collège Stanislas.....	529
BOCQUET (J.-A.), ancien élève de l'École Centrale.....	522
BONCOMPAGNI (PRINCE B.).....	416
BONNET (O.), membre de l'Institut.....	486
BORLETTI (FRANÇOIS), ingénieur à Milan.. 126, 376, 377, 380,	426, 428 et 528
BOUDÈNES (J.), au Lycée d'Avignon..... 125, 126, 180 et	380
BOULOGNE (PAUL), élève au Lycée Saint-Louis.....	430
BOUTY (E.), professeur au Lycée Saint-Louis.....	92
BRASSINNE (E.).....	318 et 320
BRIANCHON.....	100 et 318
BRISSE (Ch.), rédacteur..... 193, 207, 299 et	385
BROCARD (H.), capitaine du Génie.....	335
BRODIE (B.-C.).....	93
CAGNOLI.....	507



	Pages.
CAMBIER (A.).....	383, 521 et 523
CARON (J.), maître de conférences à l'École Normale.....	217
CARTIER (HENRI), élève du Lycée d'Angoulême.....	117, 118 et 426
CASSINI.....	26 et 481
CASTELLI.....	94
CATALAN (E.), professeur à l'Université de Liège. ....	126, 348, 519 et 528
CAUSSE (A.), professeur au Lycée d'Angers.....	415
CAVALIERI.....	94
CESARO (E.).....	240 et 382
CHABANEL (CHARLES).....	527
CHAIGNEAU, élève de l'Institution Duvergne.....	283
CHAMBEAU, élève du Lycée Fontanes.....	125
CHAMBON.....	480
CHOUDADOV, à Stawropol (Caucase).....	374
CHRÉTIEN (E.), élève du Lycée du Havre.....	265
CLAUSSET, élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	479
CLAVEL, élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	479
COLLIGNON (ED.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées....	490
COMBEROUSSE (CH. DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.....	91 et 462
D. (B.-H.), professeur à Rome.....	526
DEDEKIND (R.).....	90
DERVILLÉE (E.), élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	479
DESCARTES.....	20, 85, 149 et 520
DIDON.....	311 et 312
DORLET (E.), élève du Lycée de Dijon.....	256
DOSTOR (G.), docteur ès sciences.....	374
DUCATEL (A.), professeur au Lycée Fontanes.....	92
DUFAU (HENRI), élève du Lycée de Bordeaux.....	99
DULEAU.....	97
DUPIN (CH.).....	164
DVORAK (DR V.).....	94
ESCARY, professeur au Lycée de Tarbes.....	93
EULER.....	289 348, 349, 351 et 461
FAIFOER (AURELIANO).....	90
FAUQUEMBERGUE (E.), maître répétiteur au Lycée de Saint- Quentin.....	192, 256, 377, 382, 473 et 480
FAURE (H.), chef d'escadrons d'Artillerie en retraite.....	472
FAYE (H.), membre de l'Institut.....	92
FERMAT (P.).....	94
FIORINI (MATTEO), professeur à l'Université de Bologne.....	92
FLAMMARION (CAMILLE).....	144
FLEURY (V.), élève du Lycée du Havre.....	126
FOUCAULT (LEON).....	340
FOURET (G.), répétiteur à l'École Polytechnique.....	473
FRENET, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon....	348 et 351

	Pages.
FRESNEL .....	93
FUSS.....	483
GALILÉE .....	94, 320 et 321
GAMBEY, professeur au Lycée de Saint-Étienne ...	245, 254 et 508
GAVINO (JUAN), au Ministère de la Marine, à Madrid.....	126
GENEIX-MARTIN (l'abbé), de l'École Saint-Sigisbert, à Nancy	113, 122 et 126
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées. 94, 335, 371, 422 et	480
GERGONNE.....	171 et 331
GERONO, rédacteur.. 360, 372, 383, 425, 432, 473, 479, 515, 520	et 521
GILBERT (PH.), professeur à l'Université de Louvain .....	460
GIVELET, de Reims.....	117
GOFFART (N.), chef d'Institution.....	126, 376, 424 et 430
GRAVE (D <sup>r</sup> ).....	94
GRIMAUD, maître répétiteur au Lycée de Tarbes.....	122
HABICH, directeur de l'École spéciale des Constructions et des	Mines, à Lima .....
	301 et 458
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique.....	5 et 296
HAMILTON (W.-R.).....	301 et 333
HART... ..	154, 156, 157 et 159
HENRY (CH.).....	94
HENRY (E.), professeur au Lycée d'Angers .....	184 et 220
HERMITE (CH.), membre de l'Institut.....	348 et 407
HÉRON (D'ALEXANDRIE).....	93
HOFFMANN .....	330
HOFMANN (FRITZ), à Munich.....	321
HOSPITAL (marquis DE L').....	498
HOTTENHOFF (A.), élève de l'Athénée de Bruxelles .....	126
HOUEL (J.), professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux	91, 332 et 333
HUNYADY (E.), professeur à l'École Polytechnique de Budapest.	384
HURWITZ (A.), à Leipzig.....	384
IGURBIDE (APOLINAR FOLA).....	90
JAMET (V.), professeur au Lycée de Nice.....	349
JAMIN, membre de l'Institut.....	92
KEMPE .....	154, 159, 160, 161 et 163
KIEN (L.), élève de Notre-Dame-du-Sacré-Cœur, à Plaisance	122 et 278
KRANTZ (H.-J.), à Bréda.....	419
LACOMBE, à Bar-sur-Seine.....	380
LAGRANGE.....	91
LAGUERRE, examinateur d'admission de l'École Polytechnique.	141, 142, 143, 380 et 542
LAISANT (A.), député de la Loire-Inférieure....	93, 332, 333 et 424
LAPLACE .....	148 et 475

	Pages.
LAQUIÈRE .....	110 et 561
LÉAUTÉ (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.....	522
LEBLOND (A.), élève du Lycée du Havre.....	126, 376 et 379
LEBON (ERNEST), professeur au Lycée Charlemagne..	219, 269 et 431
LEGENDRE... ..	348 et 349
LEGOUX (A.), professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.	145
LEINEKUGEL (A.).....	184 et 475
LEJEUNE-DIRICHLET (P.-G.) .....	90
LÉVY (L.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.....	94
LEZ (H.). 122, 126, 144, 185, 283, 376, 377, 379, 380, 410, 426 et	428
LIGUINE (V.), professeur à l'Université d'Odessa....	93, 153 et 300
LIONNET.....	336, 357, 359, 476, 479, 520 et 521
LIUVILLE.....	520
LONGCHAMPS (G. DE), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.....	369
LUCAS (ÉDOUARD), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.. ..	361 et 419
MAC-CULLAGH.....	29 et 31
MACLAURIN.....	453 et 454
MANNHEIM (A.), professeur à l'École Polytechnique. 48, 140, 351 385, 428 et	433
MANSION (P.), professeur à l'Université de Gand.....	418
MARCHAND (J.), ancien élève de l'École Polytechnique.....	450
MARCOLONGO.....	380
MATHET (G.), professeur au Lycée de Lyon.....	92
MATHIEU (J.-J.-A.), lieutenant-colonel d'Artillerie ....	156 et 431
MEUSNIER .....	518
MEYER (L.), élève du Lycée du Havre .....	126 et 376
MONTESANO (DOMENICO).....	379, 380, 427, 428 et 430
MORET-BLANC, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre. 113, 114, 124, 125, 126, 184, 230, 266, 283, 357, 368, 373, 380, 382, 421, 422, 426 428, 430, 475, 479, 520, 521 et	523
MUIR (THOMAS), maître à l'École supérieure de Glasgow.....	288
MUNCK (JULES), élève de l'Athénée de Bruxelles .....	126
NADAL (JOSEPH), élève du Lycée de Toulouse.....	380
NEUBERG (J.), professeur à l'Athénée Royal de Liège .....	418
NEWTON .....	84
OCAGNE (MAURICE D'), élève ingénieur des Ponts et Chaussées. 32, 40, 154, 156, 171, 240, 241, 300, 302, 303, 336 et	430
ORLOW (GÉRASSIME), professeur à l'École de construction de Saint-Petersbourg .....	311
OVIDIO (ENRICO D'), professeur à l'Université de Turin.....	93
PALLAZ (ADRIEN), élève de l'École Polytechnique de Zurich. 126 et	432
PAPPUS.....	110
PASCAL .....	99, 100, 101 et 318



	Pages.
PEAUCELLIER, lieutenant-colonel du Génie....	153, 154, 156 et 157
PELLET .....	335, 336 et 475
PICARDEAU (E.), du Lycée de Clermont.....	381
PICART (A.).....	33, 49 et 163
PICQUET (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.....	95 et 96
PISANI (F.), professeur à l'Institut technique de Messine	126,
	371, 376, 377, 379, 380, 428 et 430
PLARR (GUSTAVE).....	333 et 522
POMEY (J.-B.), élève de l'École Polytechnique.....	111 et 332
PONCELET.....	397
POUJADE.....	431
PRONY (DE).....	239
PROTH.....	46
PROUHET (E.).....	91 et 332
REALIS (S.), ingénieur, à Turin. 343, 376, 383, 426, 432, 526 et	528
REBOUL (L.), élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	479
REGNIER, élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	479
RESAL (H.), membre de l'Institut. 7, 91, 94, 289, 301, 337, 481 et	515
RICCATI .....	234
RICHARDSON (Rev. G.).....	432
ROBAGLIA, élève au Prytanée militaire de la Flèche.....	479
ROBERTS (SAMUEL).....	94
ROLLE.....	84
ROMERO (J.), à Bilbao.....	48
ROUBAUDI (C.).....	274
ROUCHÉ (E.), examinateur d'admission à l'École Polytechnique.	91, 97, 217, 218, 219, 325, 462, 519 et 520
SAINT-GERMAIN (A. DE), professeur à la Faculté des Sciences de	
Caen.....	91 et 306
SALADINI.....	483
SAVARY.....	7, 8 et 461
SCHROEN.....	240
SCHROETER (H.) .....	383, 472, 473 et 523
SCHWAB.....	520
SERRET (J.-A.), membre de l'Institut .....	91, 362 et 482
SIHAEWEN (P.-V.), à Sarrebruck.....	331
SOMOFF.....	302 et 304
STACHE (E.), élève de l'Athénée de Bruxelles .....	126
STAINVILLE (DE) .....	171 et 172
STEINER.....	5
STEPHANOS (CYPARISSOS).....	296 et 299
STRÉKALOF (V. DE), à Saint-Petersbourg.....	382, 430, 479 et 528
STURM.....	91 et 331
SYLVESTER (J.-J.) .....	415
TAIT (P.-G.), professeur à l'Université d'Édimbourg.....	333 et 521
TANNERY (PAUL), ingénieur des Manufactures de l'État.....	93



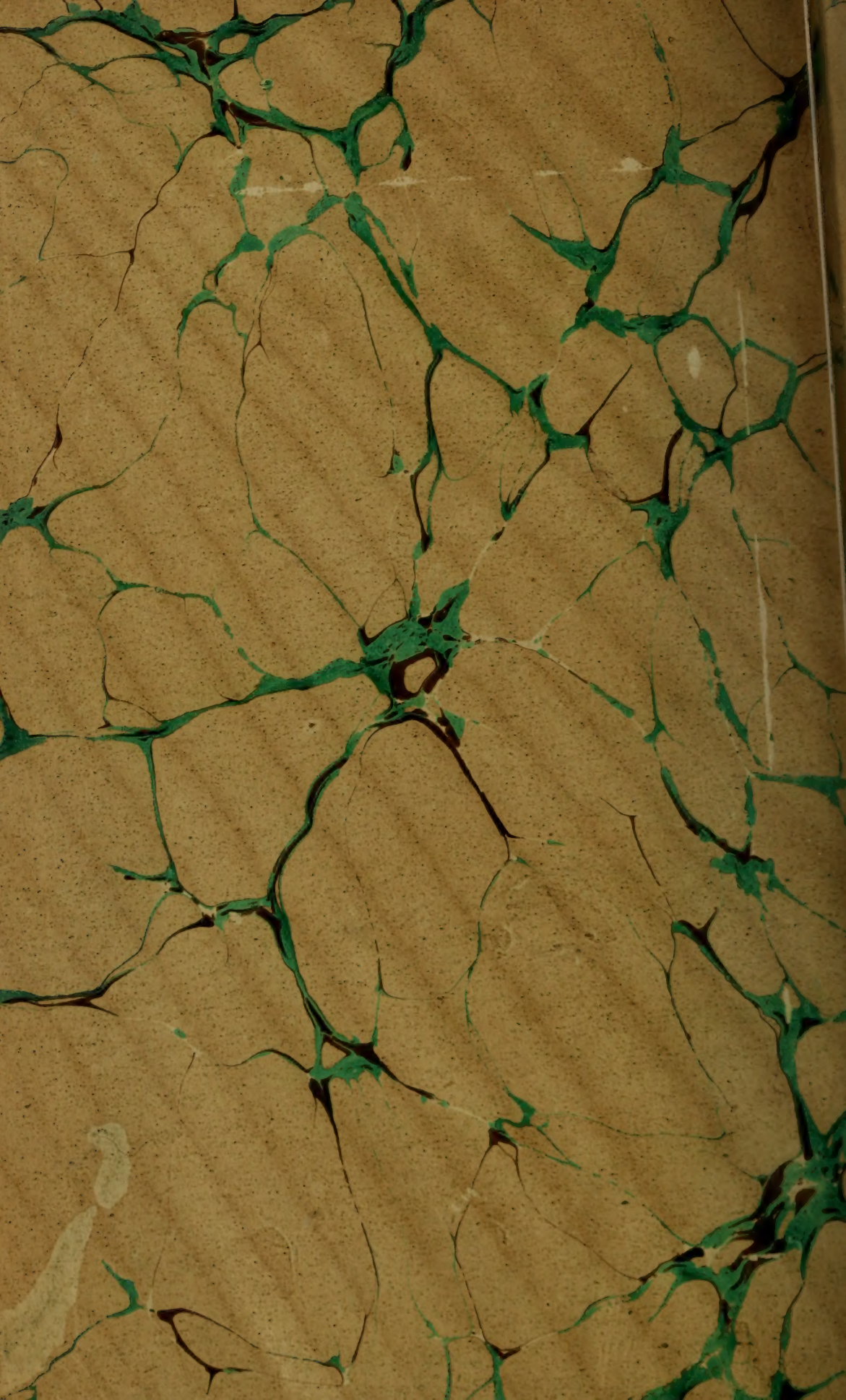
	Pages.
TAYLOR.....	147 et 454
TCHEBICHEF.....	362 et 521
THOMAS (J.), maréchal des logis d'Artillerie de marine, à Saïgon.	379, 380 et 415
TISSERAND, membre de l'Institut.....	349
TORRICELLI.....	94
TORS (ODILLE), au Lycée de Nancy.....	431
UNVERZAGT.....	333
UNWIN (W. CAWTHORNE), professeur au Collège Royal Indien des ingénieurs civils.....	522
VIELLE (H.), élève du Lycée du Havre.....	126, 376, 379 et 380
VIRIEU (DE).....	421
VUILLEUMIER (HENRI), élève de l'École Polytechnique de Zurich..	126
WALECKI, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Fontanes.....	401, 402 et 556
WALKER (J.-J.).....	94
WEILL, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.	62
WHITWORTH (W.-A.).....	378
YVON VILLARCEAU, membre de l'Institut.....	563













QA

1

N8

v.41

Nouvelles annales  
de mathématiques

Physical &  
Applied Sci.  
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE  
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

---

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

---

